WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

(a) Für $|z| \leq (N+1)/2$ gilt

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|z|^N}{N!}.$$

(b) Bestimmen Sie (ohne Verwendung der exp-Taste Ihres Taschenrechners) die ersten beiden Nachkommstellen in der Dezimalbruchdarstellung von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k^2} z^k$ (2) $\sum_{k=0}^{\infty} k^5 z^k$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$ (4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \begin{cases} 2^{-k}, & k \text{ gerade} \\ 3^{-k}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen punktweise konvergieren/gleichmäßig konvergieren/nicht konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(1) $f_n(x) = \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $g_n(x) = f_n'(x) = -\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(3) $h_n(x) = \max\left(n - n^2|x - 1/n|, 0\right), \quad x \in [0,1]$ (Graph!)

Aufgabe 4. Für $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$L(a) := \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Zeigen Sie, daß $L(a) = 0$ für $a \neq 1/2$. Was ist $L(1/2)$?
(**Hinweis:** Man verwende die Reihenentwicklung des Sinus oder *de l'Hospital*.)

Bonusaufgabe.

(a) Beweisen Sie die Formel

$$(1-z) \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = z - \sum_{k=2}^{n} \frac{z^k}{k(k-1)} - \frac{1}{n} z^{n+1}.$$

(b) Verwenden Sie (a) um nachzuweisen, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (z^k/k)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq 1\}$ konvergiert, nicht aber im Punkt $z = 1$.

b.w.

Knobelaufgabe. (Fürs Warten aufs Christkind). Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene graphisch dar:

$$a_n = r_n\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n, \quad n = 1,\ldots,8,$$

mit

$$r_n := \begin{cases} \text{1. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ ungerade,} \\ \text{2. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nun konstruieren Sie rekursiv die Zahlenfolge $\{n_k\}_{k=1,\ldots,9}$:

$$\begin{aligned} n_0 &:= 0 \\ n_k &:= \text{Neunerrest von } n_{k-1} + m_k \qquad (k = 1,\ldots,9) \quad \text{mit} \\ m_k &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } R < 1 \\ 3 & \text{falls } R = 1 \\ 4 & \text{falls } R > 1 \end{cases} \quad \text{in 2.}(k) \text{ mit } k = 1,\ldots,4 \text{ bzw. 2.}(k-3) \text{ falls } k = 5,6, \\ m_k &:= \begin{cases} F(1)+4 & \text{falls in 3.}(k-6) \text{ eine Grenzfunktion } F \text{ existiert,} \\ 3 & \text{falls die Funktionenfolge in 3.}(k-6) \text{ nicht konvergiert.} \end{cases} \quad (k = 7,8,9). \end{aligned}$$

Nun verbinden Sie die Punkte a_{n_k}, $k = 1,\ldots,9$, in dieser Reihenfolge durch je eine Strecke.
Schreiben Sie $L(1/2)$ aus Aufgabe 4 in der Form $L(1/2) = -p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd.
Verzieren Sie das Bildchen weiter mit den Mengen

$$M_s = \{\lambda\Big[\frac{s}{10}(-p-4-(q+2)i) + \frac{10-s}{10}(-p+4-(q+8)i)\Big] + (1-\lambda)a_7 : \lambda \in [0,1]\}$$

für $s = 0, 1, \ldots, 10$.
Hinweis für klassische Geometer: Die gesamte Konstruktion läßt sich mit Zirkel und Lineal ausführen, ohne Zuhilfenahme einer Meßskala. (Aber die Koordinaten sind durchaus benutzerfreundlich gewählt.)

* * * Frohes Fescht * * *

Abgabe: Montag 07.01.08 in der Vorlesung.