

# Elementare Differentialgeometrie

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.** (a) Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum, d.h. eine Menge  $X$  mit einem System  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , die wir **offene Mengen** nennen, mit den Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ .
- (ii) Falls  $U, V \in \mathcal{O}$ , dann auch  $U \cap V \in \mathcal{O}$ .
- (iii) Falls  $U_\alpha \in \mathcal{O}$  für alle  $\alpha \in A$ , wobei  $A$  eine beliebige Indexmenge ist, so auch  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$ .

Sei  $M \subset X$  eine beliebige Teilmenge und  $\mathcal{O}_M$  die **Relativ-Topologie** oder **induzierte Topologie**, d.h. für eine Teilmenge  $V \subset M$  gilt  $V \in \mathcal{O}_M$  genau dann, wenn es ein  $U \in \mathcal{O}$  gibt, so daß  $V = M \cap U$ . Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Topologie auf  $M$  definiert.

(b) Sei  $\mathcal{O}$  die gewöhnliche Topologie auf dem  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist die auf  $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$  induzierte Topologie die gewöhnliche Topologie des  $\mathbb{R}^1$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $h_i^\pm$  die in der Vorlesung definierten Karten für  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , d.h.

$$\begin{aligned} h_i^\pm : U_i^\pm &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

wobei  $U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : \pm x_i > 0\}$ . Sei  $h^\pm$  die stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol auf die Äquatorebene, d.h. für  $p \in S^n$ ,  $p \neq (0, \dots, 0, 1) = N$  ("Nordpol"), ist  $h^+(p)$  definiert als der Schnittpunkt der Geraden durch  $N$  und  $p$  mit der "Äquatorebene"  $\{x_{n+1} = 0\}$ ; analog für  $h^-$ . Setze  $U^+ := S^n \setminus \{N\}$ . Analog bezeichne  $U^-$  die  $n$ -Sphäre ohne den "Südpol".

(a) Zeigen Sie:

$$h^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n, 0)$$

Wie sieht die entsprechende Formel für  $h^-$  aus?

- (b) Die Karten  $(U^\pm, h^\pm)$  definieren einen differenzierbaren Atlas für  $S^n$ .
- (c) Die Atlanten  $\{(U_i^\pm, h_i^\pm), i = 1, \dots, n + 1\}$  und  $\{(U^\pm, h^\pm)\}$  definieren die gleiche differenzierbare Struktur auf  $S^n$ .
- (d) Gibt es auch einen Atlas von  $S^n$  mit nur einer Karte? (Hinweis: Was weiß man über das Bild kompakter Mengen unter einer stetigen Abbildung?)

b.w.

**Aufgabe 3.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Es bezeichne  $[x] \in X/\sim$  die Äquivalenzklasse von  $x \in X$  im Quotientenraum  $X/\sim$  aller solcher Äquivalenzklassen. Mit  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  sei die Quotientenabbildung  $x \mapsto [x]$  bezeichnet. Eine Teilmenge  $U \subset X/\sim$  heißt **offen in der Quotiententopologie** genau dann, falls  $\pi^{-1}(U)$  offen ist in  $X$ .

(a) Dies definiert in der Tat eine Topologie auf  $X/\sim$ .

(b) Dies ist die feinste Topologie auf  $X/\sim$  (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die  $\pi$  stetig ist.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  zwischen topologischen Räumen  $(X, \mathcal{O})$  und  $(X', \mathcal{O}')$  heißt **stetig**, falls  $f^{-1}(U') \in \mathcal{O}$  für alle  $U' \in \mathcal{O}'$ .

**Aufgabe 4.** Man versehe die Oberfläche des Würfels

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \max\{|x_1|, \dots, |x_{n+1}|\} = 1\}$$

mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Abgabe: Montag 19.01.2009

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI