WS 2008/2009

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Yvonne Deuster

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 3

Seien $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ zwei reguläre parametrisierte Raumkurven, definiert auf einem Intervall (a,b). Die Kurve $\boldsymbol{\beta}$ heißt eine **Evolvente** von $\boldsymbol{\alpha}$, falls für jedes $t \in (a,b)$ gilt: $\boldsymbol{\beta}(t)$ liegt auf der Tangente von $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\alpha}(t)$, und die Tangenten von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ in $\boldsymbol{\alpha}(t)$ bzw. $\boldsymbol{\beta}(t)$ sind orthogonal zueinander. Die Kurve $\boldsymbol{\beta}$ heißt eine **Evolute** von $\boldsymbol{\alpha}$, falls $\boldsymbol{\alpha}$ eine Evolvente von $\boldsymbol{\beta}$ ist.

Aufgabe 1. Sei $\boldsymbol{\alpha}(s)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve.

(a) Zeichne qualitativ die Evolvente für eine typische ebene Kurve (siehe dazu auch (b)).

(b) Falls $\boldsymbol{\beta}$ eine Evolvente von $\boldsymbol{\alpha}$ ist, so gilt

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + (c-s)\,\mathbf{T}(s),$$

wobei c eine Konstante ist und $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha}'$. Beachte: s ist i. a. nicht die Bogenlänge für $\boldsymbol{\beta}$.

(c) Unter welchen Bedingungen ist $\boldsymbol{\alpha}(s)+(c-s)\,\mathbf{T}$ eine reguläre Kurve und damit eine Evolvente von $\boldsymbol{\alpha}$?

Wegen (b) ist $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$ ein Maß für die Bogenlänge auf $\boldsymbol{\alpha}$. Daher läßt sich $\boldsymbol{\beta}$ konstruieren, indem man einen Faden von der Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ abwickelt.

Aufgabe 2. Die **Zykloide** ist die ebene Kurve

$$\begin{cases} x(t) &= a(t+\sin t) \\ y(t) &= a(1-\cos t) \end{cases}$$

(a) Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt auf dem Rand eines Rades vom Radius a beschreibt, das auf der Gerade $y = 2a$ abrollt, wobei für $t = 0$ der genannte Punkt in $(x,y) = (0,0)$ liegt.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide auf dem Zeitintervall $[0,t]$.

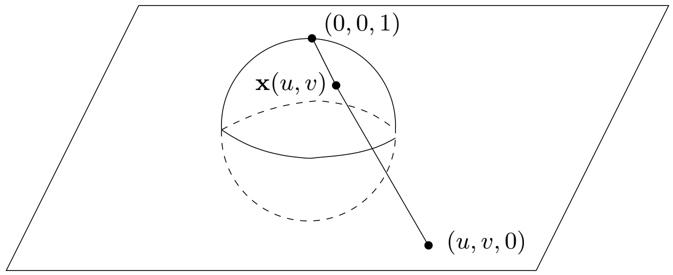
(c) Berechnen Sie explizit die Evolvente der Zykloide (durch Verwendung von Aufgabe 1(b) – beachten Sie, daß t nicht die Bogenlänge ist). Zeigen Sie damit explizit, daß diese Evolvente wieder eine Zykloide ist.

Bemerkung. Diese Konstruktion spielte eine wichtige Rolle in Christian Huygens' (1629 – 1695) Konstruktion einer Pendeluhr von hoher Präzision.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die 2−Sphäre

$$\mathrm{S}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Die Gerade durch $(u, v, 0) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $(0, 0, 1)$ schneidet S^2 in einem weiteren Punkt. Dieser sei mit $\mathbf{x}(u, v)$ bezeichnet.



Berechnen Sie $\mathbf{x}(u, v)$ und zeigen Sie, daß $\mathbf{x}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück ist. Die zu $\mathbf{x}$ inverse Abbildung $\mathrm{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ heißt **stereographische Projektion**.

Aufgabe 4. Die Sphäre S^2 läßt sich durch zwei Flächenstücke vollständig beschreiben, z.B. mittels stereographischer Projektion von Nord- bzw. Südpol $(0, 0, \pm 1)$. Berechnen Sie die Koordinatentransformation zwischen diesen beiden Flächenstücken und zeigen Sie damit, daß S^2 eine Fläche ist.

Abgabe: Montag 03.11.08

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI