WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum X sind äquivalent:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind $\emptyset$ und X.

(iii) Falls $X = A \cup B$, mit $A, B \neq \emptyset$ Teilmengen von X, so gilt $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ oder $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Hier bezeichnet $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.

(iv) Es gibt keine surjektive stetige Abbildung von X in einen diskreten topologischen Raum, der mehr als einen Punkt enthält. (Ein topologischer Raum Y heißt *diskret*, falls jede Teilmenge offen ist, insbesondere alle einpunktigen.)

Aufgabe 2. Ein topologischer Raum (oder dessen Topologie) heißt *diskret*, falls jede Teilmenge offen ist, oder äquivalent: falls alle einpunktigen Teilmengen offen sind. Dies ist die 'feinstmögliche' Topologie, d.h. diejenige mit den meisten offenen Mengen. Man stellt sich die Punkte eines solchen Raumes als diskret liegend vor, im Gegensatz zu kontinuierlich verteilten Punkten.

Ein Raum heißt *total unzusammenhängend*, falls jede Zusammenhangskomponente aus nur einem Punkt besteht.

(a) Jeder diskrete Raum ist total unzusammenhängend.

(b) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, mit der von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ induzierten Topologie, ist total unzusammenhängend, aber nicht diskret.

Aufgabe 3. Es seien $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre.

(a) $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $D^n \setminus S^{n-1}$.

(b) Die Gerade durch den 'Nordpol' $N := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen weiteren Punkt $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ schneidet die Äquatorebene $\{x_{n+1} = 0\}$ in genau einem Punkt. Dies definiert eine Abbildung $S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, die sogenannte *stereographische Projektion.* Geben Sie eine explizite Formel für diese Abbildung an und zeigen Sie damit, daß $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $S^n \setminus \{p\}$ ist für jeden beliebigen Punkt p von S^n.

(c) Der Quotientenraum D^n/S^{n-1} ist homöomorph zu S^n. (Mit X/A ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow \big(x = y$ oder $x, y \in A\big)$ gemeint.)

Aufgabe 4. Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine *Einbettung*.

(a) Jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung. (Zeigen Sie dazu zunächst, daß jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen ist.)

(b) Die Abbildung $f\colon [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^5$ gemäß

$$f(x,y) = \big(\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y\big)$$

ist eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^5$. Überlegen Sie sich dazu, daß eine Abbildung $\overline{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$ eines Quotientenraumes $X/\!\sim$ genau dann stetig ist, wenn $\overline{f} \circ \pi$ stetig ist, wobei $\pi\colon X \to X/\!\sim$ die Quotientenabbildung bezeichnet.

(c) Sind x, y, x', y' reelle Zahlen, für die

$$(2 + \cos x) \cos 2y = (2 + \cos x') \cos 2y'$$

und

$$(2 + \cos x) \sin 2y = (2 + \cos x') \sin 2y'$$

gilt, so gilt auch

$$\cos x = \cos x' \;, \qquad \cos 2y = \cos 2y' \;, \qquad \sin 2y = \sin 2y'.$$

Folgern Sie daraus, daß die Abbildung $g\colon [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^4$ gemäß

$$g(x,y) = \big((2 + \cos x)\cos 2y, (2 + \cos x)\sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y\big)$$

sogar eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^4$ ist.

Abgabe: Montag 19.10.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI