WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, daß

$$S^{m+n+1} \cong \left(S^m \times D^{n+1}\right) \cup \left(D^{m+1} \times S^n\right)$$

mit

$$\left(S^m \times D^{n+1}\right) \cap \left(D^{m+1} \times S^n\right) = S^m \times S^n.$$

Betrachten Sie dazu den Rand von

$$D^{m+n+2} \cong D^{m+1} \times D^{n+1},$$

oder arbeiten Sie mit expliziten Koordinaten für $S^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{m+n+2}$.

(b) Zeigen Sie mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz, daß für $m \neq n$ gilt:

$$H_q\left(S^m \times S^n\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für} \quad q = 0, m, n, m+n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Was gilt für $H_q\left(S^m \times S^m\right)$?

Aufgabe 2.

(a) Die Abbildung $z \mapsto z^n$ der komplexen Ebene in sich selbst (für gegebenes $n \in \mathbb{N}$) erweitert eindeutig zu einer stetigen Abbildung von S^2 in sich selbst (vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 4).

(b) Was ist der Abbildungsgrad dieser Abbildung?

Aufgabe 3. Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung $f\colon\ S^n \to S^n$ mit $\deg(f) = k$.

Aufgabe 4. Schreibe S^n, $n \geq 2$, als Vereinigung der nördlichen Hemisphäre D^n_+ und der südlichen Hemisphäre D^n_-. Sei $f\colon\ S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung mit $f\left(D^n_\pm\right) \subset D^n_\pm$. Mit $S^{n-1} := D^n_+ \cap D^n_-$ ist $f|_{S^{n-1}}$ eine stetige Abbildung $S^{n-1} \to S^{n-1}$. Zeigen Sie, daß $\deg(f) = \deg\left(f|_{S^{n-1}}\right)$.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie $\operatorname{im}\Delta = \ker i_*$ und $\operatorname{im} j_* = \ker \Delta$ in der Homologiesequenz von Satz 7.17.

Bonusaufgabe. Geben Sie eine geometrische Beschreibung des Homomorphismus Δ in der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 7.18) für die Zerlegung eines Komplexes K in zwei Unterkomplexe L und M. Mit anderen Worten: Gegeben ein q-Zykel x in $K = L \cup M$, wie findet man geometrisch einen $(q-1)$-Zykel z in $L \cap M$, so daß $\Delta[x] = [z]$?

Abgabe: Montag 18.1.10

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI