WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Beschreiben Sie eine Triangulierung von $\mathbb{R}P^n$. Verwenden Sie dazu beispielsweise die Beschreibung von $\mathbb{R}P^n$ als $D^n/x \sim -x$ für $x \in \partial D^n = S^{n-1}$, und finden Sie eine Triangulierung von D^n, die zum einen am Rand invariant unter der Identifikationsabbildung $x \sim -x$ ist, und zum anderen bei dieser Identifikation nicht zu 'verbotenen' Verklebungen von Simplexen führt.

Aufgabe 2. Sei K ein Simplizialkomplex im $\mathbb{R}^{n-1}$. Die **Einhängung** ΣK von K ist der wie folgt definierte Simplizialkomplex: Die Ecken von ΣK sind die Ecken von K in

$$\mathbb{R}^{n-1} \equiv \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

und die zwei zusätzlichen Ecken

$$a = (0, \ldots, 0, 1)\ , \quad b = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Simplexe von ΣK sind, neben den 0-Simplexen a, b, von der Form

$$\sigma,\ a\sigma,\ b\sigma,$$

für jedes Simplex σ von K. Zeigen Sie:

(a) ΣK ist in der Tat ein Simplizialkomplex.

(b) $|\Sigma K|$ ist wegzusammenhängend.

(c) Wenn $|K|$ wegzusammenhängend ist, dann ist $|\Sigma K|$ einfach zusammenhängend.

Aufgabe 3. Ist K ein Simplizialkomplex mit $|K| \cong S^n$ $(n \geq 0)$, dann gilt $|\Sigma K| \cong S^{n+1}$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie mittels der Existenz der simplizialen Approximation:

(a) Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $|K| \to |L|$ zwischen zwei Polyedern ist abzählbar.

(b) $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ für $n \geq 2$. (Wählen Sie dazu x_0 als Ecke in einem Simplizialkomplex K mit $|K| \cong S^n$.)

(c) Jede stetige Abbildung $S^m \to S^n$ mit $0 \leq m < n$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

b.w.

Knobelaufgabe. Es gibt keine Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ mit weniger als zehn 2-Simplexen.

Hinweis: Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten, und f die Anzahl der 2-Simplexe ('Flächen') in einer gegebenen Triangulierung von $\mathbb{R}P^2$. Sie dürfen verwenden, daß stets $e - k + f = 1$ gelten muß. (Diese Aussage über die sogenannte Euler-Charakteristik von $\mathbb{R}P^2$ werden wir in der Vorlesung später beweisen.) Man schreibe e_m für die Anzahl der Ecken, in denen m Kanten zusammentreffen. Beweisen Sie die Identitäten

$$2k = 3f \quad \text{und} \quad 2k = \sum_m m e_m,$$

und benutzen Sie diese, um die Behauptung zu folgern.

Abgabe: Montag 23.11.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI