WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie mittels des Satzes von Seifert und van Kampen, daß die Narrenkappe (Übungsblatt 4, Aufgabe 3) einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche K mittels der Beschreibung von K als verbundene Summe $K = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ und des Satzes von Seifert und van Kampen. Vergleichen Sie die so gefundene Präsentation von $\pi_1(K)$ mit den Ergebnissen von Übungsblatt 7.

(b) Berechnen Sie analog die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}P^2 \# T^2$ und $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$, und zeigen Sie, daß diese Gruppen isomorph sind. (Wir werden in der Vorlesung zeigen, daß diese Flächen tatsächlich homöomorph sind.)

Aufgabe 3. Sei G eine endlich präsentierte Gruppe. Konstruieren Sie einen Simplizialkomplex K mit $|K|$ wegzusammenhängend und $\pi_1(|K|) \cong G$.

Aufgabe 4.

(a) Jeder Isomorphismus $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, anders gesagt: jedes Element der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ der Gruppe der über $\mathbb{Z}$ invertierbaren (2×2)-Matrizen A mit ganzzahligen Einträgen (d.h. $\det A = \pm 1$), läßt sich realisieren in der Form $f_* \colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$ mit einem Homöomorphismus f des 2-Torus T^2.

(b) Ein **Linsenraum** ist ein topologischer Raum (sogar eine 3-Mannigfaltigkeit), den man aus zwei Kopien des Volltorus $S^1 \times D^2$ durch Verkleben entlang des Randes $\partial(S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1 = T^2$ mittels eines Homöomorphismus f von T^2 erhält. Was können Sie über die Fundamentalgruppe eines Linsenraumes aussagen?

Bonusaufgabe. Zwei Homöomorphismen $f, g\colon T^2 \to T^2$ mit $f_* = g_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$ sind homotop zueinander.
Hinweis:

(a) Reduzieren Sie dies auf den Fall $g = \mathrm{id}_{T^2}$ und f eine simpliziale Abbildung mit $f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(T^2)}$, die eine Ecke v_0 (in einer Triangulierung von T^2) fixiert.

(b) Betrachten Sie zwei Kantenschleifen am Punkt v_0, die $\pi_1(T^2)$ erzeugen. Homotopieren Sie f zu einer stetigen Abbildung, die diese Schleifen fixiert. Die Überlagerung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ ist hier hilfreich.

(c) Jede stetige Abbildung $h\colon D^2 \to D^2$ mit $h|_{\partial D^2} = \mathrm{id}|_{\partial D^2}$ ist homotop zur Identität rel ∂D^2.

Knobelaufgabe.

(a) Jeder Homöomorphismus $h\colon D^2 \to D^2$ mit $h|_{\partial D^2} = \mathrm{id}|_{\partial D^2}$ ist sogar **isotop** zur Identität rel ∂D^2, d.h. es gibt eine Homotopie H von id nach h mit $H(x,t) = x$ für alle $x \in \partial D^2$ und $t \in I$, und mit $x \mapsto H(x,t)$ ein *Homöomorphismus* von D^2 für jedes $t \in I$.
Hinweis: Konstruieren Sie H so, daß $H(x,t) = x$ für $|x| \geq t$.

(b) Je zwei *simpliziale* Homöomorphismen $f, g\colon T^2 \to T^2$ mit $f_* = g_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$ sind isotop zueinander. (Bemerkung: Die Aussage gilt auch ohne die Einschränkung 'simplizial', benötigt zum Beweis dann aber Ergebnisse wie den Jordanschen Kurvensatz.)

Abgabe: Montag 7.12.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI