Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Schreibe $\Sigma_{g,r}$ für die Fläche mit Rand, die man aus $\#_g T^2$ durch das Entfernen des Inneren von r disjunkten 2-Scheiben erhält, und $N_{h,s}$ für $\#_h \mathbb{R}P^2$ mit dem Inneren von s disjunkten 2-Scheiben entfernt.

(a) Man kann $\Sigma_{g,r}$ aus einem $(4g+3r)$-gon durch Identifizieren der Seiten mittels des Wortes

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} x_1 y_1 x_1^{-1} \dots x_r y_r x_r^{-1}$$

erhalten.

(b) Finden Sie entsprechend ein Wort, das $N_{h,s}$ beschreibt.

(c) Geben Sie eine Präsentation für die Fundamentalgruppe von $\Sigma_{g,r}$ bzw. $N_{h,s}$ an, und bestimmen Sie die abelsch gemachte Fundamentalgruppe.

(d) $\Sigma_{g,r} \cong \Sigma_{g',r'}$ gilt nur für $g = g'$ und $r = r'$; analog für $N_{h,s}$. Außerdem ist keine der Flächen (mit Rand) $\Sigma_{g,r}$ isomorph zu einer Fläche $N_{h,s}$.

Aufgabe 2. Kann es in einer Triangulierung der Narrenkappe 2-Zykel geben?

Aufgabe 3. Wählen Sie eine Triangulierung von S^n mit der Eigenschaft, daß die Antipodenabbildung $x \mapsto -x$ simplizial ist und eine Triangulierung von $\mathbb{R}P^n$ induziert. Identifizieren Sie einen n-Zyklus in dieser Triangulierung von S^n und, für ungerades n, in der entsprechenden Triangulierung von $\mathbb{R}P^n$. Was passiert für gerades n?

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Homologiegruppen der folgenden Simplizialkomplexe:

(a) Drei Kopien des Randes eines 2-Simplex, verklebt entlang einer Ecke.

(b) Zwei hohle Tetraeder, verklebt entlang einer Kante.

(c) Ein Komplex, dessen zugrundeliegendes Polyeder homöomorph zu einem Möbisuband ist.

Bonusaufgabe. (a) Verifizieren Sie explizit, daß $\partial\sigma$ (für ein orientiertes q-Simplex σ) wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Reihenfolge der Ecken innerhalb der gegebenen Orientierungsklasse. Überprüfen Sie weiter, daß $\partial(-\sigma) = -\partial\sigma$.

(b) Eine einfach geschlossene, orientierte polygonale Kurve in einem Simplizialkomplex K definiert einen 1-Zyklus, wenn man sich die Kurve denkt als formale Summe der Kanten, die diese Kurve ausmachen. Zeigen Sie, daß $Z_1(K)$ von solchen 'elementaren' Zykeln erzeugt wird.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, besteht in den folgenden Schritten.

(o) Es genügt, die Aussage für Simplizialkomplexe K mit $\dim K = 1$ und $|K|$ zusammenhängend zu beweisen.

(i) Definiere einen Homomorphismus $\varepsilon\colon C_0(K) \to \mathbb{Z}$ durch $\varepsilon(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i$, wo die x_i die Ecken von K sind und $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

(ii) Sei z ein 1-Zyklus und (x, y) eine Kante von K, die in z mit einer Vielfachheit $\lambda \neq 0$ auftritt. Sei K' der Komplex, der aus K durch Entfernen der Kante (x, y) (aber nicht der Ecken x, y) entsteht. Dann ist $|K'|$ noch stets zusammenhängend, denn andernfalls würde $z - \lambda(x, y)$ in K' in zwei 1-Ketten c_1, c_2 zerfallen mit $\varepsilon \circ \partial_1(c_i) \neq 0$.

(iii) Es gibt also einen Kantenweg in K' von y nach x. Dieser kann so gewählt werden, daß er zusammen mit (x, y) einen elementaren Zykel z_1 in K definiert. Dann ist $z - \lambda z_1$ ein Zykel in K'. Iteriere dieses Argument, um z als Summe von elementaren Zykeln zu schreiben.

Knobelaufgabe. Sei $|K|$ ein Polyeder homöomorph zu einem Torus mit dem Inneren von drei disjunkten Scheiben entfernt. Orientiere die Randkurven von $|K|$ und bezeichne die resultierenden elementaren 1-Zykel mit z_1, z_2, z_3. Zeigen Sie, daß $[z_3] = \lambda[z_1] + \mu[z_2]$ in $H_1(K)$, mit $\lambda, \mu \in \{1, -1\}$. Was läßt sich sagen, wenn man den Torus durch die Kleinsche Flasche ersetzt?

Abgabe: Montag 14.12.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI