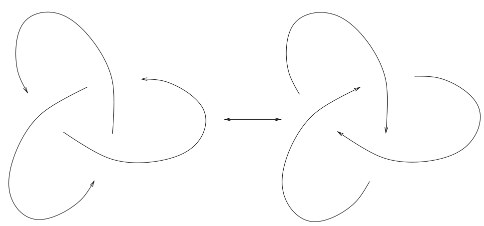
WS 2010/11 Prof. Hansjörg Geiges

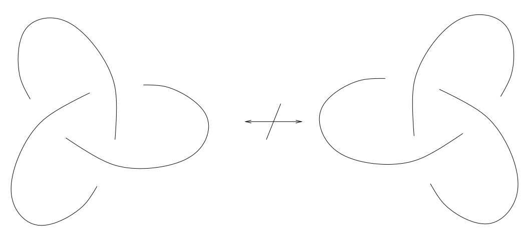
Geometrische Topologie

Übungsblatt 2

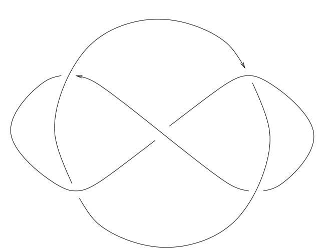
Aufgabe 1. Ein orientierter Knoten (d.h. ein Knoten mit einer "Durchlaufrichtung") heißt **invertierbar**, falls er als orientierter Knoten isotop zu sich selbst mit der umgekehrten Orientierung ist. Zeigen Sie, daß der Kleeblattknoten invertierbar ist.



Aufgabe 2. Ein Knoten heißt **spiegelsymmetrisch**, falls er isotop zu seinem Spiegelbild ist. Berechnen Sie das Kauffman-Polynom des links- und rechtshändigen Kleeblatt-Knotens und zeigen Sie damit, daß der Kleeblatt-Knoten nicht spiegelsymmetrisch ist.



Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß die im Bild gezeigte Verschlingung isotop ist zur Whitehead-Verschlingung aus der Vorlesung.



(b) Berechnen Sie das Jones-Polynom dieser Verschlingung

(i) via das Kauffman-Polynom;

(ii) direkt aus der Flecht-Relation für das Jones-Polynom.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Der Torus T^2 kann als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} x &= -\sin\phi(R + r\cos\theta), \\ y &= \cos\phi(R + r\cos\theta), \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

wobei $r < R$ reelle Konstanten sind, und $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$. Skizzieren Sie diesen Torus und kennzeichnen Sie die Parameter ϕ, θ, r, R in Ihrer Skizze. Schreiben Sie die obige Parametrisierung in der Form (Rotationsmatrix) $\cdot$ (parametrisierte Kreislinie).

(b) Seien p, q teilerfremde ganze Zahlen. Die Menge

$$T(p,q) = \left\{(x,y,z) \in T^2 : \, p\phi = q\theta\right\}$$

heißt (p,q)-**Torusknoten**. Zeigen Sie:

(i) $T(n,1)$ und $T(1,n)$ sind triviale Knoten für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $T(p,q) = T(q,p)$.

(iii) $T(p,q) = T(-p,-q) = -T(p,q)$, d.h. Torusknoten sind invertierbar. (Hier sei $T(p,q)$ mit einer Orientierung versehen; $-T(p,q)$ bezeichnet dann den Knoten mit umgekehrter Orientierung.)

(iv) $T(-p,q)$ ist das Spiegelbild von $T(p,q)$.

(c) Identifizieren Sie den Kleeblattknoten als Torusknoten.

Abgabe: Montag 25.10.10
Bis spätestens 11:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI