WS 2010/11 Prof. Hansjörg Geiges

Geometrische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Falls eine orientierte Verschlingung L eine ungerade (bzw. gerade) Anzahl von Komponenten hat, so enthält das Jones-Polynom $V(L)$ nur Terme der Form q^k (bzw. $q^{k+1/2}$) mit $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Die Aussage gilt für die triviale Verschlingung.

(ii) Sei ein Kreuzungspunkt des Diagrammes von L ausgewählt, und seien L_+, L_-, L_0 die entsprechenden in der Vorlesung definierten Diagramme. Es bezeichne m_+, m_-, m_0 die Anzahl der Komponenten der durch diese Diagramme repräsentierten Verschlingungen. Dann gilt:

(a) m_+ und m_- haben die gleiche Parität (d.h. beide sind gerade oder beide ungerade).

(b) m_+ und m_0 haben unterschiedliche Parität.

(iii) Falls der Satz für zwei der drei Polynome $V(L_+), V(L_-), V(L_0)$ gilt, dann auch für das dritte.

(iv) Folgern Sie aus (i)–(iii) den Satz in seiner allgemeinen Form.

Aufgabe 2. Zwei orientierte Knoten K_1, K_2 seien durch Knotendiagramme wie in Aufgabe 2 von Blatt 1 dargestellt. Mit $K_1 \# K_2$ bezeichnen wir die verbundene Summe von K_1 und K_2 wie in jener Aufgabe (unter Berücksichtigung der Orientierung). Sie dürfen annehmen, daß diese verbundene Summe wohldefiniert ist. Mit $K_1 \sqcup K_2$ bezeichnen wir die Verschlingung, die durch disjunkte Vereinigung der Knotendiagramme (ohne wechselseitige Kreuzungspunkte) repräsentiert wird.

(a) Für die Windung w gilt

$$w(K_1 \# K_2) = w(K_1 \sqcup K_2) = w(K_1) + w(K_2).$$

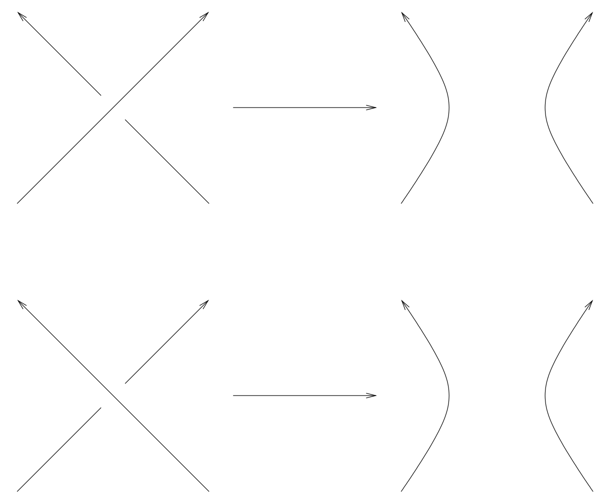
(b) Für das Kauffman-Polynom X gilt

$$\begin{aligned} X(K_1 \sqcup K_2) &= -(a^2 + a^{-2}) X(K_1) X(K_2) \\ X(K_1 \# K_2) &= X(K_1) X(K_2). \end{aligned}$$

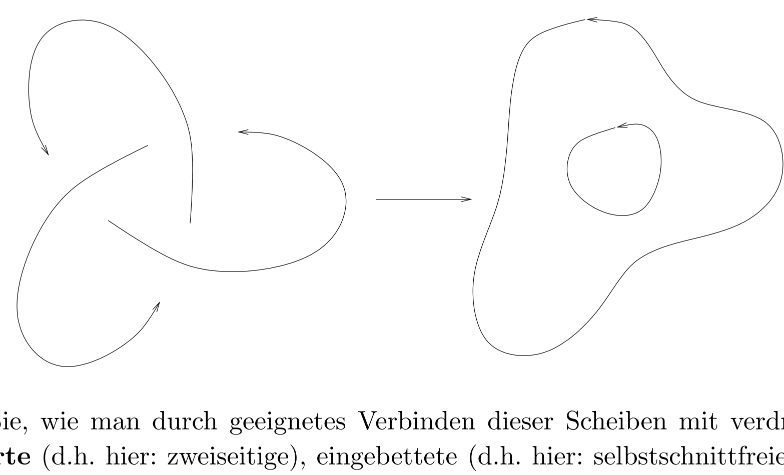
Hinweis: Analysieren Sie, wie "Zustände" von K_1 und K_2 einen Zustand von $K_1 \sqcup K_2$ bzw. $K_1 \# K_2$ definieren, und wie groß die Anzahl der Komponenten ist, wenn man nach der durch den Zustand vorgegebenen Weise die Kreuzungspunkte auflöst.

Aufgabe 3. Welche Verschlingungen erhält man durch Abschluß der Zöpfe $b_1^{-1}b_2, (b_1^{-1}b_2)^2$ bzw. $(b_1^{-1}b_2)^3 \in \mathcal{B}_3$?

Aufgabe 4. Betrachte ein orientiertes Knotendiagramm. Entferne alle Kreuzungspunkte nach folgender Regel:



Man erhält dann ein Diagramm, das nur noch aus orientierten Kreisen besteht. Jeder dieser Kreise berandet eine Scheibe. Falls die Kreise ineinander geschachtelt liegen (wie im Beispiel unten), so hebe man die Scheiben so an, daß die weiter innen liegende jeweils auf ein höheres Niveau zu liegen kommt.



Erklären Sie, wie man durch geeignetes Verbinden dieser Scheiben mit verdrehten Bändern eine **orientierte** (d.h. hier: zweiseitige), eingebettete (d.h. hier: selbstschnittfreie) Fläche im $\mathbb{R}^3$ erhalten kann, die den Knoten als Rand hat. Man nennt dies eine **Seifert-Fläche** des Knotens.

Abgabe: **Dienstag** 2.11.10
Bis spätestens **9:00 Uhr** in den Briefkasten im Keller des MI