WS 2010/11 Prof. Hansjörg Geiges

Geometrische Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (a) Die **Kleinsche Flasche** ist die geschlossene, nichtorientierbare Fläche, die man durch Verkleben zweier Möbiusbänder entlang des Randes S^1 erhält. Zeigen Sie, daß die Kleinsche Flasche Rand einer 3-Mannigfaltigkeit ist.

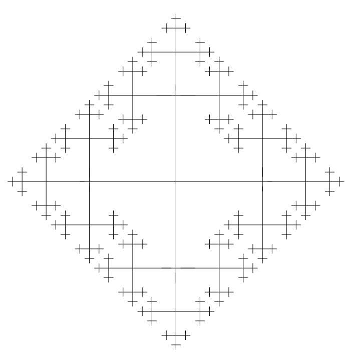
(b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche alternativ als verbundene Summe zweier projektiver Ebenen $\mathbb{R}P^2$ erhalten kann. Hier ist $\mathbb{R}P^2$ der Quotientenraum $S^2/x \sim -x$. Die **verbundene Summe** zweier Flächen entsteht dadurch, daß man aus beiden eine 2-Scheibe D^2 entfernt und die Reststücke entlang der S^1-Ränder identifiziert.

(c) Geben Sie einen alternativen Beweis von (a) mittels (b).

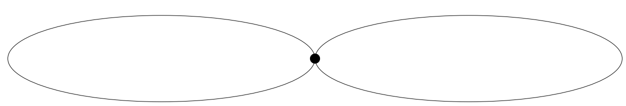
(d) (Für Hörer mit Vorkenntnissen in algebraischer Topologie) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^2$ nicht Rand einer 3-Mannigfaltigkeit M sein kann.

Hinweis: Angenommen, so ein M existierte. Dann könnte man die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit $M \cup_{\mathbb{R}P^2} M$ bilden. Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz (am besten mit $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten) führt zu einem Widerspruch. Alternativ kann man sich überlegen (über eine duale Triangulierung), daß jede geschlossene ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeit Euler-Charakteristik $\chi = 0$ hat. Andererseits müßte $\chi(\mathbb{R}P^2) \equiv \chi(M \cup_{\mathbb{R}P^2} M)$ mod 2 gelten.

Aufgabe 2. Sei $\tilde{X}$ der unendliche Baum wie im Bild angedeutet.



Sei $X = S^1 \vee S^1$ die Einpunktvereinigung von zwei Kopien von S^1.



Definiere $p\colon \tilde{X} \to X$ wie folgt: Alle Ecken von $\tilde{X}$ gehen auf den gemeinsamen Punkt der beiden Kreise. Die horizontalen Äste gehen (für wachsendes x) im mathematisch positiven Sinne auf den ersten Kreis, die vertikalen Äste (für wachsendes y) auf den zweiten Kreis. Zeigen Sie, daß dies eine Überlagerung definiert. Ist diese regulär? Welche Gruppe operiert gegebenenfalls auf $\tilde{X}$, so daß der Quotientenraum gleich X ist?

b.w.

Aufgabe 3. Sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung.

(a) Sei α ein **Weg** in Y, d.h. eine stetige Abbildung $\alpha\colon [0,1] \to Y$. Sei $y_0 = \alpha(0)$. Wähle einen Punkt $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Dann gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\alpha}$ in X mit $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

(b) Sei Q ein zusammenhängender topologischer Raum und

$$F\colon Q \times [0,1] \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung, die wir als eine Homotopie von Abbildungen $Q \to Y$ auffassen können. Außerdem gebe es eine stetige Abbildung $\tilde{F}\colon Q \times \{0\} \to Y$ mit $p \circ \tilde{F} = F|_{Q \times \{0\}}$. Zeigen Sie, daß es dann eine stetige Abbildung $\tilde{F}: Q \times [0,1] \to Y$ gibt, die auf $Q \times \{0\}$ mit der gegebenen Abbildung übereinstimmt und $p \circ \tilde{F} = F$ erfüllt. Mit anderen Worten: Man kann das folgende Diagramm vervollständigen:

$$\begin{tikzcd}
Q \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
Q \times [0,1] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

Man nennt dies die **Hochhebungseigenschaft** für Homotopien.

(c) Falls X wegzusammenhängend ist und Y einfach zusammenhängend, so ist p bereits ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Eine Überlagerung $\tilde{Y} \to Y$ mit $\tilde{Y}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend heißt **universelle Überlagerung**. Aufgabe (c) zeigt die Eindeutigkeit der universellen Überlagerung (zu gegebenen Y) unter Annahme des Wegzusammenhangs.

Aufgabe 4. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto 2(z + 1/z) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß f eine verzweigte Überlagerung ist. Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und deren Vielfachheit.

(b) Beschreiben Sie das Bild der auf den Kreisring $\{z \in \mathbb{C}\colon 1/2 < |z| < 2\}$ eingeschränkten Abbildung f.

Abgabe: Montag 6.12.10
Bis spätestens 11:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI