WS 2010/11 Prof. Hansjörg Geiges

Geometrische Topologie

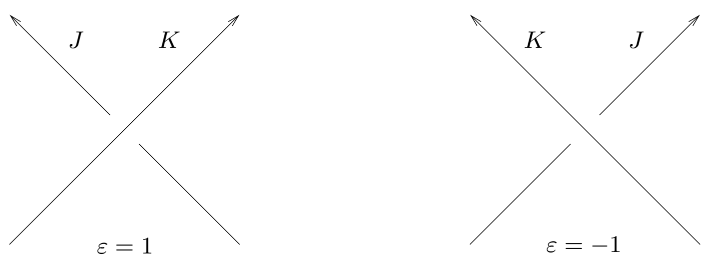
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Konstruieren Sie mittels der verzweigten Überlagerung von Übungsblatt 8, Aufgabe 1, eine dreifache verzweigte Überlagerung $S^2 \to S^2$ mit 4 Verzweigungspunkten unten, die jeweils zwei Urbilder haben.

Aufgabe 2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gibt es eine n-fache verzweigte Überlagerung $S^3 \to S^3$, verzweigt entlang des trivialen Knotens.

Aufgabe 3. Finden Sie die orientierbare Fläche, die die verbundene Summe von n Kopien von $\mathbb{R}P^2$ doppelt und unverzweigt überlagert.

Aufgabe 4. Es seien J, K disjunkte orientierte Knoten in S^3. Sei $\mathrm{lk}(J,K)$ die in der Vorlesung definierte **Verschlingungszahl** von J und K, d.h. $\mathrm{lk}(J,K) = \sum_i \varepsilon_i$, wobei die Summe über die Kreuzungspunkte von J unter K in einem Verschlingungsdiagramm genommen wird, und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ wie folgt definiert ist:



Diese Summe $\sum_i \varepsilon_i$ ist invariant unter Reidemeister-Bewegungen (siehe Vorlesung), daher ist $\mathrm{lk}(J,K)$ eine Isotopie-Invariante der Verschlingung $J \sqcup K$.

Die Knoten J und K heißen **verschlungen**, falls as *keine* Isotopie von S^3 gibt, die J und K in disjunkte 3-Bälle in S^3 bewegt.

(a) Falls $\mathrm{lk}(J,K) \neq 0$, dann sind J und K verschlungen.

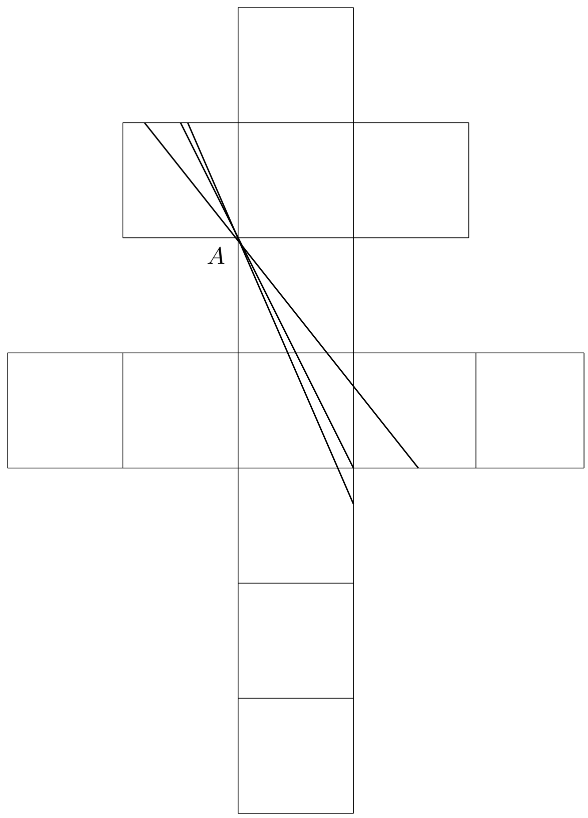
(b) Geben Sie ein Beispiel zweier verschlungener Knoten J, K mit $\mathrm{lk}(J,K) = 0$. Dazu muß man z.B. das Jones-Polynom von $J \sqcup K$ kennen (siehe frühere Übungen für geeignete Kandidaten).

(c) Sei μ ein meridionaler Kreis, der J rechtshändig umläuft. Dann gilt $\mathrm{lk}(J,\mu) = 1$.

(d) Sei Σ eine Seifert-Fläche für K. Wir können annehmen, daß J die Fläche Σ transversal in einer endlichen Anzahl von Punkten schneidet. Sei Σ so orientiert, daß diese Orientierung jene von K nach der Faustregel "äußere Normale zuerst" induziert. Zeigen Sie, daß $\mathrm{lk}(J,K)$ gleich der Anzahl der Schnittpunkte von J mit Σ ist, gezählt mit Vorzeichen.

b.w.

Aufgabe 5. (Fürs Warten aufs Christkind) Gegeben sei ein aus 13 Quadraten aufgebautes Erzbischofskreuz. Gesucht ist eine Gerade durch den Punkt A, die das Kreuz in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt. Bestimmen Sie diese Gerade, und geben Sie eine Konstruktion dieser Geraden mit Zirkel und Lineal an.



Abgabe: Montag 10.1.11
Bis spätestens 11:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI