Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Finden Sie mittels einer geeigneten Integrationsmethode eine Stammfunktion der folgenden Funktionen f:

(i) Für $n \in \mathbb{Z}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = (\log x)^n$, $x \in \mathbb{R}^+$
(Hinweis: partielle Integration für $n = 1$, dann rekursive Formel)

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$

(iv) $f(x) = (\sin x)^5$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, sei $f\colon\ \mathbb{R}\backslash\{a, b\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f, indem Sie f zunächst in der Form

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ geeignet darstellen.

(b) Sei $f\colon\ \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 2}{(x^2+2x+2)(x-1)^2}.$$

Schreiben Sie f in der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geeignet. Bestimmen Sie dann eine Stammfunktion von f.

Bemerkung. Das in diesen Beispielen angegebene Verfahren heißt **Partialbruchzerlegung**. Allgemein läßt sich jede rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ mit reellen Polynomen p, q, wobei der Grad von p kleiner ist als der von q, als Summe von Termen der Form

$$\frac{sx+t}{(x-c)^k} \qquad \text{oder} \qquad \frac{sx+t}{(ax^2+bx+c)^k}$$

schreiben, wobei $x - c$ bzw. $ax^2 + bx + c$ mit $4ac - b^2 > 0$ (d.h. $ax^2 + bx + c$ ohne reelle Nullstelle) die Faktoren von $q(x)$ sind, und k bis zu der Potenz läuft, mit der der entsprechende Faktor in $q(x)$ auftritt.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie mittels der Ungleichung

$$\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

daß $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Können Sie dies auch direkter zeigen, indem Sie (wie in der Vorlesung gezeigt) benutzen, daß e^x schneller wächst als jede Potenz von x?

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log x$. Hierbei bedeutet $x \to 0^+$, daß man zur Bestimmung des Grenzwertes (und zum Beweis seiner Existenz) nur solche Nullfolgen (x_n) betrachtet, für die $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^b := \exp(b \log a)$. Zeigen Sie:

(i) Für $b = p/q \in \mathbb{Q}$ stimmt diese Definition mit der früheren als $a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ überein.

(ii) $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$, $(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$, $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.

(iii) Für $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^b$, differenzierbar mit $f'(x) = bx^{b-1}$.

(iv) Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$, differenzierbar mit $g'(x) = \log(a) \cdot a^x$.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie vermöge partieller Integration und des Majorantenkriteriums die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

wobei der Integrand $(\sin x)/x$ in $x = 0$ als 1 gesetzt wird, so daß der Integrand auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist. Der tatsächliche Wert des Integrals soll nicht bestimmt werden.

Knobelaufgabe. Gegeben sei ein großes Blatt Papier mit parallelen Linien im Abstand d. Wir lassen wiederholt eine Nadel der Länge $l < d$ auf das Blatt fallen. Sei N die Anzahl der Versuche insgesamt, und n die Anzahl der Versuche, bei denen die Nadel eine der Linien berührt. Für großes N geht das Verhältnis n/N gegen die Wahrscheinlichkeit, bei einem Nadelwurf eine Linie zu treffen.

Begründen Sie durch die Berechnung eines geeigneten Integrals, daß diese Wahrscheinlichkeit gleich $2l/\pi d$ ist.

Hinweis: Wenn θ den Winkel zwischen der gefallenen Nadel und den Linien auf dem Blatt bezeichnet, wo muß bei gegebenem θ die Nadel fallen, damit sie eine der Linien berührt? Stellen Sie mit dieser Überlegung die Wahrscheinlichkeit in der Form

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

mit einer geeigneten Funktion $f(\theta)$ dar.

Diese Aufgabe liefert also eine Möglichkeit, die Zahl π experimentell zu bestimmen.

Abgabe: Montag 12.12.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.