WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathbf{e} \neq 0$ ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ der Länge $e < 1$. Für gegebenes $a \in \mathbb{R}^+$ betrachten wir die Ellipse, die durch die Gleichung

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = a(1 - e^2)$$

gegeben ist. Wir schreiben F für den Ursprung im $\mathbb{R}^2$, da dieser hier ein Brennpunkt der Ellipse ist. Sei $\ell \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade orthogonal zu $\mathbf{e}$ im Abstand $a(1-e^2)/e$ (in Richtung von $\mathbf{e}$) vom Ursprung F. Zeigen Sie, daß die Ellipse beschrieben werden kann als die Menge

$$\bigl\{P \in \mathbb{R}^2 \colon\ |PF| = e \cdot d(P, \ell)\bigr\},$$

wobei $d(P, \ell)$ den Abstand des Punktes P zur Geraden ℓ bezeichnet. Die Gerade ℓ ist die sogenannte *Direktrix* der Ellipse.

Aufgabe 2. (a) Es seien positive reelle Zahlen a, b gegeben. Definiere $e \in \mathbb{R}^+$, $e > 1$ durch die Gleichung $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. Skizzieren Sie die Menge

$$\mathcal{H} := \Bigl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\Bigr\}.$$

Sei F_1 der Punkt $(-ae, 0) \in \mathbb{R}^2$ und F_2 der Punkt $(ae, 0)$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{H} = \bigl\{P \in \mathbb{R}^2 \colon\ |F_1P| - |F_2P| = \pm 2a\bigr\},$$

d.h. $\mathcal{H}$ ist eine Hyperbel nach unserer Definition mittels der Gärtnerkonstruktion.

(b) Berechnen Sie den Abstand eines Punktes $(x, y) \in \mathcal{H} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ zu der Geraden $\{y = bx/a\}$, und zeigen Sie, daß dieser Abstand für $x \to \infty$ gegen Null geht (wobei der entsprechende Ast von $\mathcal{H}$ stets auf einer Seite der Geraden liegt). Man nennt diese Gerade eine *Asymptote* der Hyperbel.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Schnittkurve des Kegels

$$\bigl\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\bigr\}$$

mit der affinen Ebene

$$E := \bigl\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = my + c\bigr\},$$

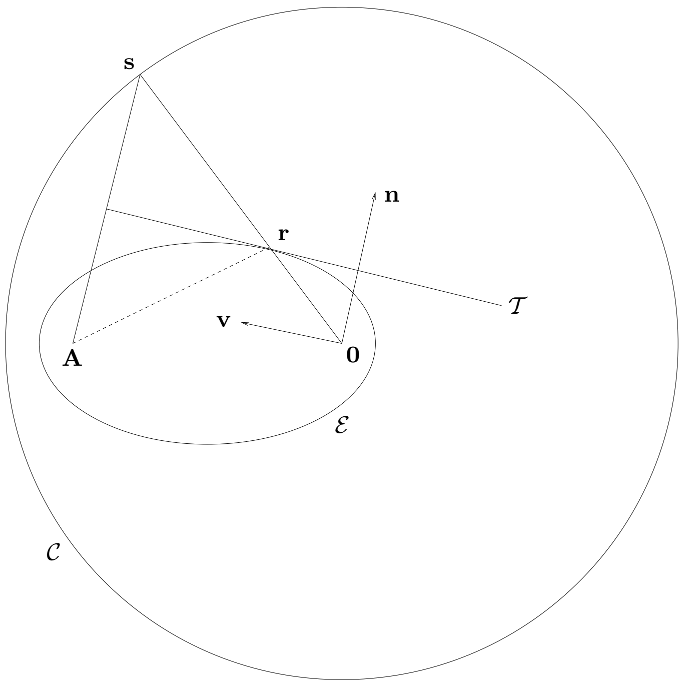
wobei c, m reelle Zahlen seien mit $c > 0$ und $0 \leq m < 1$.

(a) Geben Sie eine Gleichung für diese Schnittkurve an.

(b) In affinen Ebenen im $\mathbb{R}^3$ können wir Längen mittels der Einschränkung des Standardskalarproduktes auf dem $\mathbb{R}^3$ messen. Zeigen Sie, daß es eine längenerhaltende Abbildung $E \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die die Schnittkurve auf eine Ellipse in Standardform $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ (analog zu Aufgabe 2) abbildet. Bestimmen Sie die Halbachsen a und b explizit.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, eine Lösung des Keplerproblems mit Energie $h < 0$. Es sei $\mathcal{E}$ die Kurve in der Ebene durch den Ursprung $\mathbf{0}$ und orthogonal zum Drehimpuls $\mathbf{c}$, die dabei durchlaufen wird. Wir wollen einen alternativen Beweis dafür geben, daß $\mathcal{E}$ eine Ellipse ist. (Die Idee zu diesem Beweis stammt von van Haandel–Heckmann.) Sei dazu $\mathcal{C}$ der Kreis vom Radius $-\mu/h$ um $\mathbf{0}$ in dieser Ebene. Bei Gesamtenergie h entspricht dies den Punkten mit kinetischer Energie Null, so daß $\mathcal{E}$ im Inneren von $\mathcal{C}$ liegt. Betrachte die folgende Skizze:



Sei $\mathbf{s}$ die Projektion des Punktes $\mathbf{r}$ von $\mathbf{0}$ auf $\mathcal{C}$, d.h. $\mathbf{s} := -\mu\mathbf{r}/hr$. Sei $\mathbf{A}$ der Punkt, den man durch Spiegelung von $\mathbf{s}$ an der Tangenten $\mathcal{T}$ zu $\mathcal{E}$ in $\mathbf{r}$ erhält. Zeigen Sie:

(i) Mit $\mathbf{n} := \mathbf{v} \times \mathbf{c}$ gilt $\mathbf{A} = \mathbf{s} - 2\big(\langle \mathbf{s} - \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle \cdot \mathbf{n}\big)/n^2$.

(ii) $\langle \mathbf{s} - \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle = -(1 + \mu/hr)c^2$.

(iii) $n^2 = c^2v^2 = 2c^2(h + \mu/r)$.

(iv) $\mathbf{A} = -\mu\mathbf{r}/hr + \mathbf{n}/h$.

(v) $\dot{\mathbf{A}} = 0$, d.h. der Punkt $\mathbf{A}$ hängt nicht von t ab.

(vi) $\mathcal{E}$ ist eine Ellipse mit Brennpunkten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{A}$ und großer Halbachse $a = -\mu/2h$.

Bemerkung: Der Konstruktion von $\mathbf{A}$ in dieser Aufgabe liegt die *Spiegelungseigenschaft* der Ellipse zugrunde. Sei $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2. Sei weiter $P \in \mathcal{E}$ ein Punkt auf der Ellipse, und $\mathcal{T}$ die Tangente an $\mathcal{E}$ im Punkt P. Dann ist der Winkel, den die Strecke PF_1 mit der Tangenten $\mathcal{T}$ bildet, gleich dem Winkel zwischen PF_2 und $\mathcal{T}$. Können Sie dies zeigen? (Dies ist nicht mehr offizieller Teil der Aufgabe!)

Hinweis: Überlegen Sie sich dazu, daß der Weg von F_1 nach F_2 via P der kürzeste aller Wege von F_1 nach F_2 via eines Punktes auf $\mathcal{T}$ ist.

Abgabe: Montag 22.10.12,
bis spätestens **13:30 Uhr** in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.