WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (a) Sei $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine C^2-Abbildung. Setze $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{c} := \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$. Zeigen Sie, daß

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

Hinweis: $r\dot{r} = \langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle$; siehe Abschnitt 1.1 der Vorlesung.

(b) Sei nun $\mathbf{r}$ eine Lösung des Keplerproblems $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$ mit einer Konstanten $\mu > 0$. Aufgrund der Impulserhaltung handelt es sich dann, wie wir gesehen hatten, um eine ebene Kurve. Wähle kartesische Koordinaten so, daß wir $\mathbf{r}(t)$ schreiben können als $(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), 0)$. Zeigen Sie, daß

$$r^2\ddot{r} - \frac{c^2}{r} = -\mu$$

mit $c = r^2\dot{\theta}$.

(c) Zeigen Sie, daß umgekehrt eine C^2-Kurve der Form $t \mapsto (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), 0)$, wobei r der Gleichung aus (b) genügt (mit $c = r^2\dot{\theta}$ wie dort), eine Lösung des Keplerproblems ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten den Fall $c = 0$ im Dreikörperproblem, wobei wir Jacobi-Koordinaten verwenden (vergl. Übungsblatt 5, Aufgabe 4). Wir wollen einen Satz von Weierstraß beweisen, wonach die Bedingung $c = 0$ impliziert, daß sich die drei Körper in einer festen Ebene bewegen. Insbesondere ergibt sich dann mit dem Satz von Sundman, daß ein totaler Kollaps eines Dreikörpersystems nur im ebenen Fall möglich ist.

(a) Zeigen Sie, daß $\langle \mathbf{r}, \mathbf{R} \times \mathbf{V} \rangle = 0$, und folgern Sie daraus, daß $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{V}$ in einer Ebene liegen. Zeigen Sie analog, daß $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{R}$ in einer Ebene liegen. Warum darf man daraus i.a. nicht schließen, daß alle vier Vektoren in einer Ebene liegen?

(b) Nehmen wir zunächst an, daß $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{R}(t)$ für jedes t in einem gewissen Zeitintervall linear unabhängig sind. Zeigen Sie dann, daß $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{R}(t)$ eine von t unabhängige Ebene aufspannen. Verifizieren Sie dazu die Gleichung $(\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{R}) = 0$, und benutzen Sie die Formel für $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}/u)$ aus Abschnitt 1.1 der Vorlesung. Argumentieren Sie analog für das Paar $\mathbf{r}, \mathbf{V}$. Begründen Sie, warum in diesen Fällen dann auch $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)$ in dieser festen Ebene liegen.

(c) Angenommen, für einen Zeitpunkt t_0 ist sowohl $\mathbf{R}(t_0)$ als auch $\mathbf{v}(t_0)$ jeweils ein Vielfaches von $\mathbf{r}(t_0)$. (Beachten Sie, daß $\mathbf{r}(t)$ nie der Nullvektor ist, wohingegen $\mathbf{R}(t)$ durchaus auch der Nullvektor sein kann.) Zeigen Sie:

(i) Falls auch $\mathbf{V}(t_0)$ ein Vielfaches von $\mathbf{r}(t_0)$ ist, so liegen $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{R}(t)$ für alle Zeiten t auf einer festen Geraden. Begründen Sie weiter, daß dann auch $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)$ auf einer festen Geraden liegen.

(ii) Falls $\mathbf{V}(t_0)$ kein Vielfaches von $\mathbf{r}(t_0)$ ist, so gilt $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{R})|_{t=t_0} \neq 0$. Begründen Sie sorgfältig weiter, warum dann auch in diesem Fall folgt, daß die Bewegung der $\mathbf{r}_i$ in einer festen Ebene liegt.

b.w.

Aufgabe 3. Gegeben seien drei Körper der Massen m_1, m_2 bzw. m_3. Wir wollen eine allgemeine Formel für die Ecken z_1, z_2, z_3 eines gleichseitigen Dreiecks in der Ebene finden, so daß der gemeinsame Schwerpunkt der Massen m_j im jeweiligen Punkt z_j gleich dem Ursprung ist. Die Rechnungen werden eleganter, wenn wir uns die z_j als Punkte in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ denken.

(a) Zeigen Sie, daß die allgemeine Beschreibung von drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, gegeben ist durch

$$z_1 = z_0 + s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z_2 = z_0 + s\zeta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z_3 = z_0 + s\bar{\zeta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

wobei z_0 ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$ ist, $\theta \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ und $\zeta := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$.

(b) Beschreiben Sie die allgemeine Formel für z_1, z_2, z_3, wenn man zusätzlich die Schwerpunktsbedingung $m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$ stellt.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir einen Spezialfall des Satzes von Lagrange herleiten. Dazu betrachten wir in der komplexen Zahlenebene eine Bewegung dreier Körper $t \mapsto \mathbf{r}_j(t) \in \mathbb{C}$ der Masse m_j, $j = 1, 2, 3$, von der Form $\mathbf{r}_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} z_j$, wobei $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte sind, die nicht auf einer Geraden liegen, und $\omega \in \mathbb{R}^+$. Wir wollen zeigen, daß dieser Kreisbahn-Ansatz genau dann eine Lösung des Dreikörperproblems liefert, wenn gilt:

(i) Der Schwerpunkt liegt im Ursprung, d.h. $m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$.

(ii) Die drei Punkte z_1, z_2, z_3 bilden ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge wir s nennen.

(iii) Es gilt $\omega = \sqrt{GM/s^3}$, wobei $M := m_1 + m_2 + m_3$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor. Zunächst wollen wir annehmen, daß die $\mathbf{r}_j(t)$ tatsächlich eine Lösung des Dreikörperproblems liefern.

(a) Formulieren Sie die Gleichungen des Dreikörperproblems als Gleichungen in den z_j. Beobachten Sie dazu, daß $|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)| = |z_j - z_k| =: r_{jk}$ fest bleibt.

(b) Folgern Sie (i) mittels einer geeigneten Kombination dieser Gleichungen.

(c) Überlegen Sie sich, daß man eine der drei Gleichungen des Dreikörpersystems, z.B. die von $\ddot{\mathbf{r}}_3$ stammende, durch die Gleichung (i) ersetzen kann, und daß man dann das Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{z} = 0$ schreiben kann, mit $\mathbf{z} := (z_1, z_2, z_3)^T$ und

$$A := \begin{pmatrix} \omega^2 - Gm_2/r_{12}^3 - Gm_3/r_{13}^3 & Gm_2/r_{12}^3 & Gm_3/r_{13}^3 \\ Gm_1/r_{12}^3 & \omega^2 - Gm_1/r_{12}^3 - Gm_3/r_{23}^3 & Gm_3/r_{23}^3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

(d) Begründen Sie, warum aus der Tatsache, daß z_1, z_2, z_3 nicht kollinear sind, folgt, daß der Rang der Matrix A gleich 1 ist. Schließen Sie daraus, daß $r_{12} = r_{23} = r_{13} =: s$, d.h. (ii).

(e) Folgern Sie, daß $\det A = 0$, und daraus (iii).

Verifizieren Sie umgekehrt, daß eine Bewegung der Form $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} z_j$, wobei die Bedingungen (i) bis (iii) gelten sollen, den Gleichungen des Dreikörperproblems genügt.

Abgabe: Montag 19.11.12,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.