Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 10

Es bezeichne H stets den hyperbolischen Raum, d.h. den oberen Halbraum $\{x_n > 0\}$ im $\mathbb{R}^n$ mit der hyperbolischen Metrik gegeben durch $\langle X, Y\rangle_{\mathrm{h}} = \langle X, Y\rangle / x_n^2$ für $X, Y \in T_x H$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $(c_1, \ldots, c_n) \in H$ die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto c_n(x_1, \ldots, x_n) + (c_1, \ldots, c_{n-1}, 0)$$

eine Isometrie des hyperbolischen Raumes H ist.

(b) Folgern Sie, daß die Isometriegruppe von H, d.h. die Menge aller Isometrien von H mit Verknüpfung gegeben durch Komposition von Abbildungen, *transitiv* auf H operiert, was bedeutet, daß es zu je zwei Punkten $x, y \in H$ eine Isometrie gibt, die x auf y abbildet.

(c) Wir betrachten nun spezieller den Fall $n = 2$ und identifizieren H mit der oberen Halbebene $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ ist

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

eine Isometrie von H.

(ii) Die Abbildung

$$z \longmapsto 1/\overline{z}$$

ist eine Isometrie von H.

(iii) Jede Inversion an einem Kreis vom Radius r um einen Punkt $p \in \partial H$, eingeschränkt auf H, läßt sich als Komposition von Abbildungen wie in (i) und (ii) schreiben.

(iv) Die Abbildungen aus (i) und (ii) erzeugen die gesamte Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene H. Überlegen Sie sich dazu, daß man durch Komposition einer gegebenen Isometrie von H mit Abbildungen wie in (i) und (ii) erreichen kann, daß z.B. die Punkte i und $2\mathrm{i} \in H \subset \mathbb{C}$ auf sich selbst abgebildet werden, und daß eine solche Isometrie bereits die Identität sein muß.

Aufgabe 2. Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit E von H soll *hyperbolische k-Ebene* heißen, wenn zu je zwei Punkten in E auch die hyperbolische Gerade durch diese Punkte ganz in E liegt. Zeigen Sie:

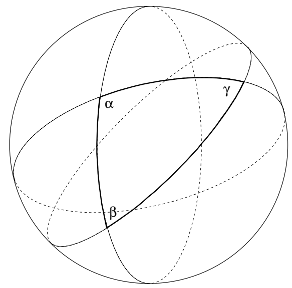
(a) Die hyperbolischen k-Ebenen sind genau die k-dimensionalen euklidischen Halbebenen (wir wollen diese Typ 1 nennen) und die k-dimensionalen euklidischen Halbsphären (Typ 2), jeweils orthogonal zu ∂H.

(b) Zu je drei Punkten in H gibt es eine hyperbolische 2-Ebene, welche die drei Punkte enthält.

(c) Jede hyperbolische k-Ebene vom Typ 2 läßt sich durch eine Isometrie von H auf eine k-Ebene vom Typ 1 abbilden.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Sei Δ ein von drei Punkten in der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und Großkreisbögen zwischen diesen Punkten bestimmtes *sphärisches Dreieck* mit Innenwinkeln α, β, γ. Begründen Sie, daß Δ in einer 2-Sphäre $S^2 \subset S^{n-1}$ liegt. Zeigen Sie dann vermöge eines elementargeometrischen Argumentes, daß für den Flächeninhalt A von Δ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$.



(b) Sei Δ ein von drei Punkten in H und den hyperbolischen Geradensegmenten zwischen diesen bestimmtes Dreieck. Begründen Sie, daß Δ in einer hyperbolischen 2-Ebene liegt. Nach Aufgabe 2 können wir dann o.E. annehmen, daß Δ in der 2-Ebene $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ liegt. Daher können wir im weiteren $n = 2$ annehmen, und wir schreiben $x := x_1, y := x_2$.

(c) Wie wir aus der Anfängervorlesung wissen, gilt für Tangentialverktoren $X, Y \in T_pH \cong \mathbb{R}^2$:

$$(dx \wedge dy)_p(X, Y) = \text{Flächeninhalt des von } X \text{ und } Y \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$$

Zeigen Sie: Ist Φ eine Isometrie der hyperbolischen Ebene, so gilt

$$\Phi^*\Big(\frac{dx \wedge dy}{y^2}\Big) = \frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

(d) Wir definieren den *hyperbolischen Flächeninhalt* A von Δ durch

$$A := \iint_\Delta \frac{dx\, dy}{y^2}.$$

Nach (c) ist diese Definition invariant unter Isometrien von H. Nach Anwenden einer geeigneten Isometrie können wir daher o.E. annehmen, daß eine der Dreiecksseiten von Δ vertikal ist. Die beiden anderen Seiten können in der Form $\theta \mapsto (x_0 + a\cos\theta, a\sin\theta)$ parametrisiert werden. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$A = \int_{\partial\Delta} \frac{dx}{y}.$$

Zeigen Sie damit, daß $\alpha + \beta + \gamma = \pi - A$, wobei α, β, γ die Innenwinkel von Δ bezeichnen.

Bemerkung: Die Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = \pi + KA$ mit $K = \text{konst.}$ kann als Definition eines Raumes mit *konstanter Krümmung* K genommen werden. Der euklidische Raum hat nach dieser Definition konstante Krümmung 0. Durch Skalieren von S^n bzw. H erhält man Räume beliebiger positiver bzw. negativer konstanter Krümmung.

Aufgabe 4. Diskutieren Sie den parabolischen Fall des Keplerproblems analog zu den Überlegungen der Vorlesung. Zeigen Sie insbesondere, daß die Geschwindigkeitskreise nach Inversion an der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ zu euklidischen Geraden werden. Betrachten Sie auch deren Parametrisierung.

Abgabe: **Montag 7.1.13**,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.