WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Wir betrachten die kanonische Transformation $\varphi\colon (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \mapsto (q_1, q_2, p_1, p_2)$ von Übungsblatt 12, Aufgabe 1. Finden Sie eine erzeugende Funktion $S = S(p, Q)$, d.h. eine Funktion mit

$$dS = q\,dp + P\,dQ$$

nach Ersetzen von q und p durch die entsprechenden Funktionen in Q und P. Gibt es auch erzeugende Funktionen vom Typ $S(q, Q)$, $S(p, P)$ oder $S(q, P)$?

Aufgabe 2. Wir betrachten die Hamilton-Funktion $H(q, p) = p^2/2 - \cos q$ $(n = 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte.

(b) Skizzieren Sie das sogenannte *Phasenportrait* dieser Hamilton-Funktion, d.h. die Flußlinien des Vektorfeldes $(\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ in der (q, p)-Ebene (also die Lösungen der Hamilton-Gleichungen). Zeichnen Sie dabei insbesondere die Niveaumenge $\{H = 1\}$.

(c) Diskutieren Sie die Ljapunow-Stabilität der Gleichgewichtspunkte.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Hamilton-Funktion

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - (q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(p_1^2 p_2 - p_2 q_1^2 - 2q_1 q_2 p_1).$$

(a) Formulieren Sie die Hamilton-Gleichungen, und zeigen Sie, daß der Ursprung $(0, 0, 0, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Zeigen Sie, daß für jedes $a \in \mathbb{R}$ durch

$$q_1 = -\sqrt{2}\,\frac{\cos(t-a)}{t-a}, \quad q_2 = \frac{\cos 2(t-a)}{t-a}, \quad p_1 = \sqrt{2}\,\frac{\sin(t-a)}{t-a}, \quad p_2 = \frac{\sin 2(t-a)}{t-a}$$

eine Lösung der Hamilton-Gleichungen für $t \neq a$ gegeben ist.

(c) Folgern Sie, daß der Ursprung nicht Ljapunow-stabil ist.

(d) Bestimmen Sie explizit die Lösungen des zugehörigen linearen Systems um den Ursprung, und zeigen Sie damit dessen infinitesimale Stabilität.

Aufgabe 4. Wie wir in Aufgabe 4(b) von Übungsblatt 12 gesehen haben, läßt sich das planare zirkulare eingeschränkte Dreikörperproblem durch die Hamilton-Funktion

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\big(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\big) - p_2 - U(q_1 \cos q_2, q_1 \sin q_2)$$

beschreiben. Beachten Sie, daß wir statt P_i und Q_i wieder p_i bzw. q_i, und statt K wieder H schreiben, da wir nun eine weitere kanonische Transformation durchführen wollen. Außerdem wurde der irrelevante konstante Summand $\mu(1-\mu)/2$ in H entfernt.

b.w.

Wir betrachten nun den Fall $\mu = 0$; dies entspricht dem Keplerproblem des dritten Körpers im Gravitationsfeld allein des ersten Primärkörpers mit Masse $m_1 = 1 - \mu = 1$.

(a) Zeigen Sie, daß dann

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\big(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\big) - q_1^{-1} - p_2,$$

was nach Aufgabe 4(c) von Übungsblatt 12 gleich $h - c$ ist, wobei h wie üblich die Gesamtenergie des Systems bezeichnet. (Beachten Sie, daß $q_1 = r$.)

(b) Wir suchen nun eine kanonische Transformation $\varphi\colon\ (Q, P) \mapsto (q, p)$ mit

$$Q_1 = \frac{1}{2}\big(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\big) - q_1^{-1} = h, \quad Q_2 = p_2 = c,$$

so daß die transformierte Hamilton-Funktion $K(Q, P) = Q_1 - Q_2$ ist, was die leicht lösbaren Hamilton-Gleichungen

$$\dot{Q}_1 = 0, \ \ \dot{Q}_2 = 0, \ \ \dot{P}_1 = -1, \ \ \dot{P}_2 = 1$$

liefert. Dazu suchen wir eine erzeugende Funktion $S = S(q, Q)$ mit $\partial S/\partial q = p$ und $\partial S/\partial Q = -P$. Zeigen Sie, daß eine solche Funktion von der Form $S(q, Q) = q_2 Q_2 + F(q_1, Q_1, Q_2)$ sein muß, wobei F der folgenden Gleichung genügt:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{Q_2^2}{q_1^2} - \frac{2}{q_1} = 2Q_1.$$

Bonusaufgabe. Diese Aufgabe setzt die Diskussion aus Aufgabe 4 fort.

(c) Wir schränken uns ab jetzt auf den elliptischen Fall $h < 0$ ein. Überlegen Sie sich, daß

$$F(q_1, Q_1, Q_2) = \int_{(e-1)/2h}^{q_1} \frac{\sqrt{2Q_1 x^2 + 2x - Q_2^2}}{x}\, dx$$

eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung für F ist, und — mit den Formeln aus Kapitel 2.3 der Vorlesung (für das Keplerproblem in der Form $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}/r^3$, d.h. mit μ in der dortigen Bedeutung gleich 1) — daß der Integrand an der unteren Integralgrenze $(e-1)/2h$ verschwindet und für $q_1 \geq (e-1)/2h$ reell ist. Was ist die geometrische Bedeutung der Konstanten $(e-1)/2h$?

(d) Die Größen Q_1 und Q_2 haben, wie in (b) gesehen, eine einfache physikalische Interpretation. Wir betrachten nun P_2. Zeigen Sie, daß sich mit $q_1 = r = c^2/(1 + e\cos f)$, wobei f die wahre Anomalie der Kepler-Lösung bezeichnet, aus $-P_2 = \partial S/\partial Q_2$ die Gleichung

$$P_2 = f - q_2$$

ergibt. Nun erinnern wir uns daran, daß q_2 den Winkel des Radiusvektors zur mitrotierenden x-Achse bezeichnet (vergl. Übungsblatt 12). Daher ist $q_2 - f$ der Winkel des Perizentrums zur mitrotierenden x-Achse. Da die Rotationsgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems gleich 1 ist, ist $t + q_2 - f$ der konstante Winkel ω des Perizentrums zur nichtrotierenden ξ-Achse. Wir sehen daher schlußendlich, daß $P_2 = t - \omega$, was offensichtlich konsistent mit den Hamilton-Gleichungen in (b) ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, wieder im Fall $h < 0$, daß sich aus $-P_1 = \partial S/\partial Q_1$ die Gleichung $P_1 = T - t$ ergibt, wobei T einen Zeitpunkt der Perizentrumspassage beschreibt. Verwenden Sie dazu $r = a(1 - e\cos u)$ und die Keplergleichung (wieder unter Beachtung von $\mu = 1$).

Abgabe: Montag 21.1.13,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.