WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Bonusübungsblatt

In den folgenden Aufgaben soll die Stabilität der Librationspunkte im planaren zirkularen eingeschränkten Dreikörperproblem diskutiert werden. Es bezeichnet Φ das Potential, das dieses Problem in rotierenden Koordinaten beschreibt, d.h.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

Hierbei bezeichnet ρ_1 den Abstand des Punktes (x,y) zum Primärkörper der Masse $1-\mu$ im Punkt $(-\mu,0)$, und ρ_2 den Abstand zum Primärkörper der Masse μ im Punkt $(1-\mu,0)$. Setze

$$s = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}$$

und

$$a = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad b = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \quad c = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} a &= 1+2s-3y^2\Big(\frac{1-\mu}{\rho_1^5}+\frac{\mu}{\rho_2^5}\Big),\\ b &= 3y\Big(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^5}+\frac{\mu(x-1+\mu)}{\rho_2^5}\Big),\\ c &= 1-s+3y^2\Big(\frac{1-\mu}{\rho_1^5}+\frac{\mu}{\rho_2^5}\Big). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Verifizieren Sie, daß a,b,c an den Librationspunkten $L_1,\ldots,L_5$ die folgenden Werte annehmen:

	a	b	c
L_1	$1+2s$	0	$1-s$
L_2	$1+2s$	0	$1-s$
L_3	$1+2s$	0	$1-s$
L_4	$3/4$	$3\sqrt{3}(1-2\mu)/4$	$9/4$
L_5	$3/4$	$-3\sqrt{3}(1-2\mu)/4$	$9/4$

Aufgabe 3. Mit jedem Librationspunkt assoziieren wir die beiden Lösungen $t_\pm$ der quadratischen Gleichung

$$t^2+(4-a-c)t+ac-b^2=0.$$

(a) Zeigen Sie, daß für L_4 und L_5 die jeweiligen Wurzeln $t_\pm$ genau dann beide reell, negativ und verschieden sind, wenn $27\mu(1-\mu)<1$.

(b) Zeigen Sie, daß für L_1, L_2 und L_3 die jeweiligen Wurzeln $t_\pm$ im Fall $s>1$ nicht beide reell und negativ sein können.

b.w.

Aufgabe 4. In den Librationspunkten gilt $\partial\Phi/\partial x = 0$. Zeigen Sie, daß daraus

$$(1-\mu)\big(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2}\big)\frac{x+\mu}{\rho_1} + \mu\big(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\big)\frac{x-1+\mu}{\rho_2} = 0$$

folgt. Zeigen Sie weiter, daß man dies in L_1 in der Form

$$\rho_1(s-1) = \mu\big(1 - \frac{1}{\rho_2^3}\big)$$

schreiben kann, und in L_2, L_3 als

$$\rho_1(1-s) = \mu\big(1 - \frac{1}{\rho_2^3}\big).$$

Folgern Sie, daß in allen drei Punkten $s > 1$ gilt.

Damit kann also das Polynom aus Aufgabe 3 für keinen der Punkte L_1, L_2, L_3 zwei negative Nullstellen haben.

Aufgabe 5. Die Hamilton-Funktion für unser Dreikörperproblem ist

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - q_1)^2 - \Phi(q_1, q_2).$$

Schreibe Φ_{ij} für die Ableitung $\partial^2\Phi/\partial q_i \partial q_j$. Zeigen Sie, daß das Polynom $\chi(\lambda)$ aus Abschnitt 8.3 der Vorlesung gegeben ist durch

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1-\Phi_{11} & -\Phi_{12} & \lambda & -1 \\ -\Phi_{12} & 1-\Phi_{22} & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Zeigen Sie weiter, daß sich mit $x = q_1$, $y = q_2$ und $t = \lambda^2$ genau das Polynom aus Aufgabe 3 ergibt.

Nun wissen wir aus der Vorlesung, daß die Gleichgewichtspunkte des Hamiltonschen Systems von der Form $(q_1^0, q_2^0, -q_2^0, q_1^0)$ sind, wobei (q_1^0, q_2^0) ein Librationspunkt ist. Ein solcher Gleichgewichtspunkt ist infinitesimal stabil genau dann, wenn die Nullstellen λ von χ — unter der Annahme, daß sie alle verschieden sind — alle rein imaginär sind, also genau dann, wenn die Nullstellen des Polynoms aus Aufgabe 3 beide negativ und verschieden sind.

Damit zeigen die obigen Aufgaben, daß L_1, L_2, L_3 nicht infinitesimal stabil sind, und daher auch nicht Ljapunow-stabil. Die Librationspunkte L_4 und L_5 sind genau für $27\mu(1-\mu) < 1$ infinitesimal stabil, für $27\mu(1-\mu) \geq 1$ also weder infinitesimal noch Ljapunow-stabil. (Überlegen Sie sich, was passiert, wenn die vier Nullstellen λ nicht verschieden sind.)

Die Bedingung $27\mu(1-\mu) < 1$ bedeutet ungefähr $\mu < 0,03852$. Für das System Sonne/Jupiter hat μ einen Wert kleiner als $0,001$. Daher sind die Trojaner an den Lagrangepunkten L_4, L_5 bzgl. Sonne und Jupiter in einer stabilen Lage.

Abgabe: Montag 28.1.13,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.