WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist der Quotient von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ unter der diagonalen Wirkung der Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$, d.h.

$$\mathbb{CP}^n = \{[x_0 : \ldots : x_n] \colon (x_0, \ldots, x_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}\},$$

wobei $[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n]$ genau dann gilt, wenn es ein $\lambda \in S^1$ gibt mit $(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n)$.

(a) Geben Sie $\mathbb{CP}^n$ eine Topologie und die Struktur einer $2n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

(b) Kann man auf $\mathbb{CP}^n$ sinnvoll von holomorphen oder meromorphen Funktionen sprechen?

(c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{CP}^1$ diffeomorph zu S^2 ist.

Aufgabe 2. (a) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, N ein topologischer Raum, und $f \colon N \to M$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, daß N genau eine Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit besitzt, so daß f ein Diffeomorphismus ist.

(b) Versehen Sie die Oberfläche des Würfels

$$\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \max_i |x_i| = 1\}$$

mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3. (Zählt wie zwei Aufgaben) Im 4–dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ wird die Standardbasis

$$\mathbf{1} := (1,0,0,0),\ \mathbf{i} := (0,1,0,0),\ \mathbf{j} := (0,0,1,0),\ \mathbf{k} := (0,0,0,1)$$

ausgezeichnet, wobei wir den durch $\mathbf{1}$ aufgespannten Teilraum in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Wir erklären auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation, indem wir

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$$

und das Distributivgesetz fordern. Für $q = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ nennt man a_0 den **Realteil** von q und $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ den **Imaginärteil**. Wir identifizieren den Vektorraum der rein imaginären Elemente von $\mathbb{R}^4$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}^3$. Das zu q **konjugierte Element** ist

$$\overline{q} := a_0\mathbf{1} - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.$$

Die **Norm** von q ist $|q| := \sqrt{q\overline{q}}$.

b.w.

(a) Zeigen Sie, daß dies auf $\mathbb{R}^4$ die Struktur einer reellen assoziativen, nicht-kommutativen Divisionsalgebra definiert. Dazu ist im wesentlichen nur die Assoziativität der Multiplikation zu begründen und zu zeigen, daß zu jedem Element $q \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses existiert. Man nennt diese Divisionsalgebra die Hamiltonschen **Quaternionen** und schreibt dafür $\mathbb{H}$.

(b) Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$.

(ii) Für $q, u \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ gilt $qu - uq = 2\, q \times u$, wobei $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Gilt außerdem $|q| = 1$, so hat man die Identität $quq = u - 2\langle q, u\rangle q$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(iii) Es bezeichne $S^3 \subset \mathbb{H}$ die Einheitssphäre bezüglich der Norm $|\cdot|$. Jedes Quaternion $a \in S^3 \setminus \{\pm\mathbf{1}\}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \cos(\theta/2) \cdot \mathbf{1} + \sin(\theta/2) \cdot q$$

mit $q \in \mathbb{R}^3$, $|q| = 1$, und $0 < \theta < 2\pi$.

(iv) Für $a \in S^3$ definiert die Vorschrift $u \mapsto f_a(u) := au\overline{a}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, und es gilt $f_a \in \mathrm{SO}(3)$.

(v) Wählt man zu $a \in S^3 \setminus \{\pm\mathbf{1}\}$ die Größen q, θ wie in (iii), so gilt

$$f_a(u) = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot q \times u + (1 - \cos\theta)\langle q, u\rangle q \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^3.$$

Insbesondere gilt $f_a(q) = q$ und $\langle f_a(u), u\rangle = \cos\theta$ für alle $u \in \mathbb{R}^3$ mit $|u| = 1$ und $\langle u, q\rangle = 0$.

(c) Zeigen Sie mit (b), daß die durch $a \mapsto f_a$ definierte Abbildung $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm\mathbf{1}\}$ ist.

(d) Benutzen Sie (c) um zu zeigen, daß $\mathrm{SO}(3)$ diffeomorph zu $\mathbb{RP}^3$ ist.

Hinweis: Die Abbildung aus (c) induziert eine Abbildung $\mathbb{RP}^3 \to \mathrm{SO}(3)$. Zeigen Sie zunächst, daß diese Abbildung ein Homöomorphismus ist (z.B. unter Ausnutzung der Kompaktheit von $\mathbb{RP}^3$), der differenzierbar ist. Rechnen Sie dann an einem Punkt nach, daß die Abbildung vollen Rang hat (d.h., daß die Jacobische der Abbildung in lokalen Karten invertierbar ist). Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Abbildung kann man daraus schließen, daß die Abbildung überall vollen Rang hat und damit ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Mittwoch 6.11.13 in der Vorlesung.