WS 2013/2014 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht diffeomorph sind. Was kann man über Homöomorphie aussagen?

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Die in der Vorlesung definierte Topologie auf dem Tangentialbündel TM ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis.

(b) $T(M \times N)$ ist diffeomorph zu $TM \times TN$.

(c) Falls M kompakt ist, so ist auch das Einheitstangentialbündel T_1M kompakt.

Aufgabe 3. Das Tangentialbündel TM einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **trivial**, falls es einen Diffeomorphismus

$$TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^m$$

gibt, der T_pM linear auf $\{p\} \times \mathbb{R}^m$ abbildet für jedes $p \in M$. Zeigen Sie:

(a) TM ist trivial genau dann, wenn es m Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ auf M gibt, so daß die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ linear unabhängig sind für jedes $p \in M$. (Man nennt solche Vektorfelder **punktweise linear unabhängig**.)

(b) $T\mathbb{R}^m$ ist trivial.

(c) TS^1 und TS^3 sind trivial. (Hinweis: $S^1 \subset \mathbb{C}$, $S^3 \subset \mathbb{H}$)

Aufgabe 4. Die spezielle orthogonale Gruppe SO(3) wirkt auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ (\,\alpha & , & p\,) & \longmapsto & \alpha(p) \end{array},$$

d.h. $\alpha(\beta(p)) = (\alpha\beta)(p)$. Zeigen Sie:

(a) Dies induziert eine Wirkung auf dem Einheitstangentialbündel T_1S^2 durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & T_1S^2 & \longrightarrow & T_1S^2 \\ (\,\alpha & , & X\,) & \longmapsto & T\alpha(X) \end{array}.$$

(b) Sei X_0 ein fest gewählter Einheitsvektor in einem Punkt $p_0 \in S^2$. Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & T_1S^2 \\ \alpha & \longmapsto & T\alpha(X_0) \end{array}$$

einen Diffeomorphismus.

Abgabe: Mittwoch 20.11.13 in der Vorlesung.