Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Angenommen, $f\colon D^n \to D^n$ ist ein fixpunktfreie stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß man dann auch eine fixpunktfreie differenzierbare Abbildung $g\colon D^n \to D^n$ konstruieren könnte.

(Dies liefert einen alternativen Weg, die Existenz eines solchen f auszuschließen, da die Konstruktion aus der Vorlesung angewandt auf g direkt eine differenzierbare Retraktion $D^n \to S^{n-1}$ liefern würde.)

Aufgabe 2. Verwenden Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz, um folgende Aussage zu beweisen: Ist A eine reelle $(n \times n)$-Matrix, deren Einträge alle nichtnegativ sind, so hat A einen reellen nichtnegativen Eigenwert.

Hinweis: Falls A den Eigenwert 0 hat, ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls betrachten Sie die Abbildung $v \mapsto Av/\|Av\|$ auf einer geeigneten Teilmenge von S^{n-1}.

Aufgabe 3. Sei M die abgeschlossene obere Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \geq 0\}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Definiere eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = g(x) + y.$$

Dann ist jeder Punkt von M regulärer Punkt von f.

(b) Definiere

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) \cdot \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist 0 regulärer Wert von $f\colon M \to \mathbb{R}$, aber $f^{-1}(0)$ ist keine Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 4. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (d.h. Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik) mit Rand ∂M.

(a) Für $p \in \partial M$ und $h\colon U \to \mathbb{R}^m_+$ eine Karte um p mit $h(p) = 0$ ist

$$T_p h\colon T_p M \longrightarrow T_0 \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$$

ein Isomorphismus. Definiere

$$H_p M := (T_p h)^{-1}(\mathbb{R}^m_+).$$

Zeigen Sie, daß $H_p M$ nicht von der Wahl der Karte h abhängt.

(b) Beweisen Sie, daß es für $p \in \partial M$ genau zwei zu $T_p(\partial M)$ orthogonale Einheitsvektoren in $T_p M$ gibt. Derjenige dieser zwei Vektoren, der *nicht* in $H_p(M)$ liegt, heißt der *äußere Normalenvektor* $\mathbf{n}(p)$ des Randes. Begründen Sie, warum $\mathbf{n}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf ∂M definiert.

Abgabe: Mittwoch 11.12.13 in der Vorlesung.