WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Seien $f, g \in C^\infty(M, S^n)$ mit $\|f(p) - g(p)\| < 2$ für alle $p \in M$. (Hierbei ist S^n die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\|\,.\,\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$.) Zeigen Sie, daß f und g homotop zueinander sind.

(b) Seien $f, g \in C^\infty(M, N)$ *stetig* homotope Abbildungen, d.h. es existiere eine stetige Abbildung

$$F\colon\ M \times [0,1] \longrightarrow N$$

mit $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, daß f und g dann auch differenzierbar homotop sind.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Ist M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist jede differenzierbare Abbildung $f\colon\ M \to S^n$ mit $n > m$ homotop zur konstanten Abbildung.

(b) Für n ungerade ist die Antipodenabbildung

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

homotop zur identischen Abbildung.

Aufgabe 3. (a) Sei $W \subset \mathbb{C}$ eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und $f\colon\ W \to \mathbb{C}$ eine (reell) differenzierbare komplexwertige Funktion. Angenommen, f hat keine Nullstellen auf dem Rand ∂W, so daß die Abbildung $g := f/|f|\colon\ \partial W \to S^1$ definiert ist. Zeigen Sie: Falls $\deg_2 g = 1$, so hat f eine Nullstelle im Inneren von W.

(b) Sei nun $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom von *ungeradem* Grad n. Zeigen Sie durch Wahl von $W \subset \mathbb{C}$ als große Kreisscheibe und vermöge der Homotopie $(z,t) \mapsto (1-t)f(z) + tz^n$, daß f eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

(c) Beweisen Sie die Existenz einer komplexen Lösung der Gleichung

$$z^{2013} + \cos(|z|^2)(42 + 1729z) = 0.$$

Versuchen Sie bitte nicht, die Lösung explizit zu berechnen.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß jede differenzierbare Abbildung $f\colon S^n \to S^n$, die $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in S^n$ erfüllt, Abbildungsgrad $\deg_2 f = 0$ hat.

(b) Benutzen Sie (a) um zu beweisen: Ist $g\colon S^n \to S^n$ eine differenzierbare Abbildung mit $\deg_2 g = 1$, dann gibt es ein Antipodenpaar, das auf ein Antipodenpaar abbildet, d.h. einen Punkt $x \in S^n$ mit $g(-x) = -g(x)$.

Abgabe: Mittwoch 18.12.13 in der Vorlesung.