WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Es sei U ein topologischer Raum und $f\colon U \to \mathcal{M}(n \times k)$ eine Abbildung in den Vektorraum der reellen $(n \times k)$-Matrizen. Definiere

$$\begin{array}{rcccl} F\colon & U \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (u, x) & \longmapsto & f(u) \cdot x. \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung F ist genau dann stetig, wenn f stetig ist.

(b) Ist U eine Mannigfaltigkeit, so ist F genau dann differenzierbar, wenn f differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Sei (E, π, B) ein Vektorbündel über einem zusammenhängenden Raum B, und die Abbildung $f\colon E \to E$ ein Bündelmorphismus über id_B. Zeigen Sie:

(a) Falls $f \circ f = f$, so hat f konstanten Rang.

(b) Falls $f \circ f = \mathrm{id}_E$, so ist

$$\mathrm{Fix}(f) := \{e \in E \mid f(e) = e\}$$

ein Unterbündel von E.

Aufgabe 3. (a) Beschreiben Sie das Möbiusband (naiv aufgefaßt), ohne seinen Rand, als Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$.

(b) Beschreiben Sie eine Abbildung $M \to S^1$, die M die Struktur eines Geradenbündels, d.h. eines 1-dimensionalen Vektorbündels gibt.

(c) Zeigen Sie, daß das Geradenbündel aus (b) äquivalent zum kanonischen Geradenbündel über $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ ist.

Aufgabe 4. Sei (E, π, B) ein Geradenbündel über einem zusammenhängenden Raum B. Ein solches Geradenbündel heißt **orientierbar**, falls man in jeder Faser $\pi^{-1}(b)$ eine Orientierung so wählen kann, daß es einen Bündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ gibt, s.d. $\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}$ jede Faser $\pi^{-1}(b)$, $b \in U_\alpha$, orientierungserhaltend auf $\{b\} \times \mathbb{R}$ (mit der Standardorientierung) abbildet. Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) Das Geradenbündel ist orientierbar.

  (ii) $E \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ ist nicht zusammenhängend.

  (iii) Das Geradenbündel ist trivial.

(b) Das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{RP}^1$ ist nicht trivial.

Abgabe: Mittwoch 15.1.14 in der Vorlesung.