WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Ist (E, π, B) ein triviales Bündel und $f\colon B_0 \to B$ eine stetige Abbildung, so ist auch das induzierte Bündel $(f^*E, f^*\pi, B_0)$ trivial.

(b) Sei (E, π, B) ein Vektorbündel und $\pi_0\colon E \setminus \{\text{Nullschnitt}\} \to B$ die Einschränkung von π auf das Komplement des Nullschnittes. Geben Sie einen nirgends verschwindenden 'kanonischen' Schnitt von $\pi_0^* E$ an.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Jedes $\mathbb{R}^n$-Bündel über einem Intervall I ist trivial.

(b) Es gibt genau zwei $\mathbb{R}^n$-Bündel über S^1.

Hinweis: Aufgrund von (a) kann man annehmen, daß ein gegebenes $\mathbb{R}^n$-Bündel $E \to S^1$ beschrieben wird durch

$$E = (U_1 \times \mathbb{R}^n \sqcup U_2 \times \mathbb{R}^n) \,/ \sim,$$

wobei U_1, $U_2 \subset S^1$ zwei offene Intervalle sind derart, daß $U_1 \cap U_2$ zwei Zusammenhangskomponenten V_1, V_2 hat. Die Relation $\sim$ ist dann gegeben durch zwei Übergangsfunktionen

$$\psi_i\colon V_i \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}),\ i = 1, 2.$$

Zeigen Sie, daß das Bündel $E \to S^1$ bis auf Bündeläquivalenz nur davon abhängt, ob ψ_1 und ψ_2 in die gleiche oder in verschiedene Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ abbilden.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß für jedes beliebige Vektorbündel E die Whitney-Summe $E \oplus E$ ein orientierbares Bündel ist.

Aufgabe 4. Sei M eine Mannigfaltigkeit und Δ die Diagonale in $M \times M$:

$$\Delta := \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\}.$$

Verifizieren Sie, daß Δ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist, deren Tangential- und Normalenbündel äquivalent sind.

Abgabe: Mittwoch 22.1.14 in der Vorlesung.