0. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

H. Geiges, Differentialtopologie I

WS 2013/14

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k**-dimensionale Untermannigfaltigkeit** der Klasse C^l, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ und C^l-Funktionen

$$f_1, \dots, f_{n-k} \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, so daß

(a) $M \cap U = \{x \in U \colon f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$,

(b) $\operatorname{rang} \dfrac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = n - k$.

Bedingung (b) ist äquivalent dazu, daß die Gradienten $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$ linear unabhängig sind.

Beispiel. "Jeder Graph ist eine Untermannigfaltigkeit."

Seien $U' \subset \mathbb{R}^k$ offen, $g = (g_1, \dots, g_{n-k}) \in C^l(U', \mathbb{R}^{n-k})$. Setze

$$M := \{(x', x'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \colon x' \in U', x'' = g(x')\}$$

und $U := U' \times \mathbb{R}^{n-k}$. Definiere

$$f_i(x', x'') := x''_i - g_i(x'),\ i = 1, \dots, n-k.$$

Dann gilt $f_i \in C^l(U)$ und

$$M = \{f_1 = \ldots = f_{n-k} = 0\}.$$

Außerdem

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial x''} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist Bedingung (b) erfüllt.

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt:

Satz 1. *"Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal ein Graph."*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l. Für jeden Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ gibt es, evtl. nach Umnumerierung der Koordinaten, offene Umgebungen

$$U' \subset \mathbb{R}^k \text{ von } a' := (a_1, \ldots, a_k),$$

$$U'' \subset \mathbb{R}^{n-k} \text{ von } a'' := (a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

und eine Funktion $g \in C^l(U', U'')$, so daß

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \colon\ x'' = g(x')\}.$$

Satz 2. *"Jede Untermannigfaltigkeit sieht lokal so aus wie $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$."*
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ und einen C^l-Diffeomorphismus

$$F \colon\ U \to V$$

auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$F(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap V,$$

wobei

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine Abbildung

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

heißt **Immersion**, falls

$$\operatorname{rang} J_\Phi(t) = k \text{ für alle } t \in \Omega.$$

Hier bezeichnet J_Φ die Jacobische Matrix von Φ. Es gilt also notwendigerweise $k \leq n$.

Definition. Die **Relativ-Topologie** oder **induzierte Topologie** auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$V \subset M \text{ ist } \textbf{offen in } M :\Longleftrightarrow \exists\, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen mit } V = M \cap U.$$

Satz 3. *"Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal Bild einer Immersion." (Parameterdarstellung)*

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l genau dann, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subset M$ von a in M, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine C^l-Immersion

$$\Phi\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gibt, die Ω homöomorph auf V abbildet.

Der folgende Satz über Parametertransformationen wird später die intrinsische Definition des Mannigfaltigkeitsbegriffes motivieren:

Satz 4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l. Seien*

$$\Phi_i\colon\ \Omega_i \xrightarrow{\cong} V_i \subset M,\ i = 1, 2,$$

lokale Parameterdarstellungen der Klasse C^l mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind die $\Phi_i^{-1}(V_1 \cap V_2)$ offene Teilmengen von Ω_i, und

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1\colon\ \Phi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \Phi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ist ein C^l-Diffeomorphismus.

Weitere Details und Beispiele zu den hier nur summarisch dargestellten Sätzen finden Sie auch in den Kapiteln 4.1 und 4.2 meiner Vorlesung "Mathematik II für Physiker" des Sommersemesters 2008 (Ordner in der MI-Bibliothek).