WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

# Analysis I

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Gegeben seien drei reelle Zahlen $a, b, c$. Zeigen Sie, daß diese Zahlen genau dann alle positiv sind, wenn gilt

$$a+b+c>0, \quad ab+bc+ca>0 \quad \text{und} \quad abc>0.$$

**Aufgabe 2.** Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen, und geben Sie diese Werte gegebenenfalls an.

(a) $\left\{\frac{|x|}{1+|x|}\colon\ x \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $\left\{\frac{x}{1+x}\colon\ x > -1\right\}$

(c) $\left\{x+\frac{1}{x}\colon\ \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$

(d) $\left\{\frac{1}{(-3)^m}+\frac{n}{2n-1}\colon\ m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\right\}$

**Aufgabe 3.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß auch die Menge

$$A+B := \{x+y\colon\ x \in A,\ y \in B\}$$

nach oben beschränkt ist, und daß gilt

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, daß jede der beiden Abbildungsvorschriften

$$(m,n) \longmapsto 2^m \cdot (2n+1)$$

bzw.

$$(m,n) \longmapsto \binom{m+n+1}{2} + m + 1$$

eine Bijektion $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definiert.

b.w.

**Bonusaufgabe.** (a) Geben Sie explizit eine Bijektion zwischen dem offenen Intervall

$$(0,1) := \{x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < x < 1\}$$

und $\mathbb{R}$ an.

(b) Geben Sie explizit eine Bijektion zwischen dem offenen Intervall $(0,1)$ und dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ an.

Hinweis: Für (b) braucht man eine ähnliche Überlegung wie in der folgenden Knobelaufgabe.

**Knobelaufgabe.** (a) Das Hotel "Hilbert" besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer. Bei Ihrer Ankunft im Hotel sind diese leider alle schon belegt. Trotzdem findet die Rezeptionistin durch geschicktes Umverteilen der Gäste noch ein Zimmer für Sie, ohne daß ein Gast das Hotel verlassen oder mit einem anderen das Zimmer teilen muß. Wie geht das?

(b) Jetzt kommt auch noch ein Reisebus der Canto(u)rs mit abzählbar unendlich vielen Reisenden an. Können diese auch noch untergebracht werden?

Abgabe: Mittwoch, 5.11.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).