WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{1+\mathrm{i}} \qquad \text{(ii)}\ \frac{2-3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}} \qquad \text{(iii)}\ \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(iv)}\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$$

(b) Skizzieren Sie die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

(i) $0 < \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) < 1$

(ii) $|z + 2| < 1$

(iii) $|z - 3| + |z + 3| = 7$

(iv) $\mathrm{Im}((z - \mathrm{i})(z - 1)^{-1}) = 0$

Aufgabe 2. (a) Es seien z_1, z_2, z_3 verschiedene komplexe Zahlen mit $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) z_1, z_2, z_3 sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$$

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

(iii) z_1, z_2, z_3 sind Lösungen einer Gleichung $z^3 - c = 0$ mit $c \in \mathbb{C}^*$.

(b) Schreiben Sie das Polynom $z^3 - 1$ als Produkt zweier Polynome vom Grad 1 bzw. 2 mit reellen Koeffizienten.

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) Für $q \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

(b) Zeigen Sie, daß die Folge

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

den Grenzwert 1 besitzt. Bestimmen Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - 1| < \varepsilon$.

b.w.

Aufgabe 4. Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch die durch $S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$ definierte Folge (S_n) gegen a konvergiert. Untersuchen Sie, ob auch die Umkehrung gilt.

Bonusaufgabe. (a) Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(i) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen.

(ii) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$ bestehend aus den Dezimalzahlen mit endlicher Dezimalbruchentwicklung, d.h. Zahlen der Form

$$D, d_1 d_2 \ldots d_n 00 \ldots$$

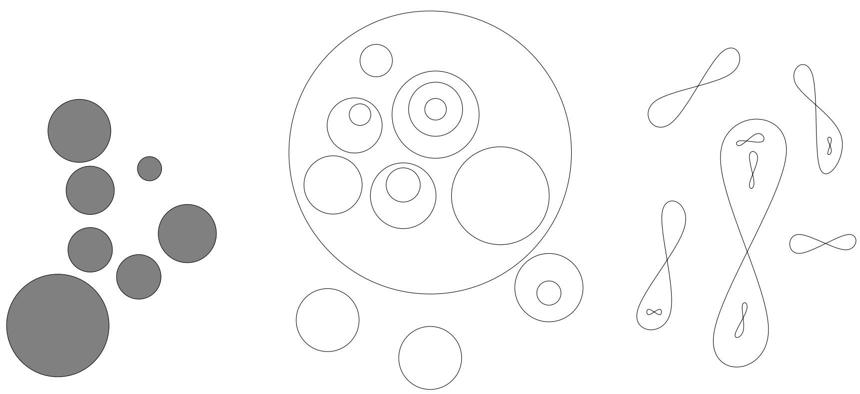
(iii) Die Menge der **Gruppenhomomorphismen** $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, d.h. der Abbildungen $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Knobelaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß jede Menge disjunkter Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ abzählbar ist.

(b) Beschreiben Sie eine überabzählbare Menge disjunkter Kreise in $\mathbb{R}^2$.

(c) Gibt es eine überabzählbare Menge disjunkter Achter in $\mathbb{R}^2$?



Abgabe: Mittwoch, 12.11.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).