Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Begründen Sie, warum die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^{r/s} \end{array}$$

für $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung

(i) mittels der Darstellung $f(x) = (x^{1/s})^r$,

(ii) aus der Identität $(f(x))^s = x^r$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

differenzierbar ist, aber nicht stetig differenzierbar, d.h. die Ableitung ist keine stetige Funktion. (In der Vorlesung wird gezeigt, daß sin und cos differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.)

Aufgabe 3. (a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

(i) $$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

(ii) $$\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

(iii) $$\begin{array}{ccc} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x := \sin x / \cos x \end{array}$$

Was ist das Bild dieser Funktionen?

(b) Begründen Sie, warum auf dieser Bildmenge die Umkehrfunktionen

$$\arcsin := \sin^{-1},\ \arccos := \cos^{-1},\ \arctan := \tan^{-1}$$

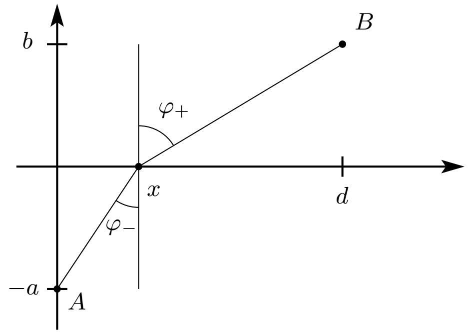
existieren. Hier steht **arc** für **arcus**, d.h. Bogen. So ist z.B. $\arcsin y$ der Winkel x (in Radian) mit $\sin x = y$, wobei das Radianmaß eines Winkels per Definition gleich der entsprechenden Bogenlänge auf dem Einheitskreis ist.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Tangensfunktion.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen arcsin, arccos und arctan.

Aufgabe 4. Gegeben seien die Punkte $A = (0, -a)$ und $B = (d, b)$ in der Ebene mit $a, b, d > 0$. In der unteren Halbebene $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ bewege man sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_-, in der oberen Halbebene $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_+. Ziel dieser Aufgabe ist es, den schnellsten Weg von A nach B zu finden.

b.w.



Sie dürfen verwenden, daß schnellste Wege in H_+ bzw. H_- Geraden sind. Argumentieren Sie dann weiter wie folgt:

(i) Berechnen Sie die Zeit $t(x)$, um via $(x, 0)$ von A nach B zu gelangen.

(ii) Berechnen Sie $t'(x)$ und zeigen Sie damit, daß für den schnellsten Weg gilt:

$$\frac{\sin \varphi_+}{\sin \varphi_-} = \frac{v_+}{v_-}. \tag{$\star$}$$

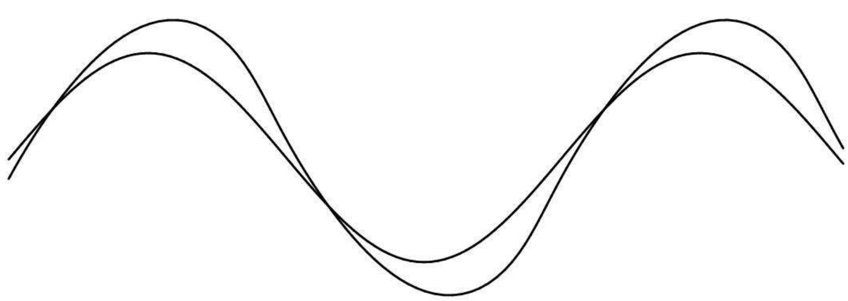
Das *Fermatsche Prinzip* (Pierre de Fermat, ca. 1607–1665) besagt, daß sich Licht stets den schnellsten Weg sucht. Dies ist eine der Inkarnationen des allgemeineren *Prinzips der kleinsten Wirkung* von Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759). Diese Aufgabe zeigt, daß aus dem *Fermatschen Prinzip* das *Snelliussche Brechungsgesetz* ($\star$) folgt (Willebrord van Roijen Snell, 1580–1626). Siehe dazu auch meine Kölner Antrittsvorlesung unter `http://www.mi.uni-koeln.de/~geiges/naw05.pdf`.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x + x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist, und auch nur in diesem Punkt stetig. Bestimmen Sie die Ableitung in diesem Punkt mittels der Darstellung von f in der Form $f(x) = f(0) + (x - 0)\Delta(x)$.

Knobelaufgabe. Das folgende Bild zeigt die Reifenspuren eines Fahrrades. In welche Richtung ist das Fahrrad gefahren? Welche der beiden Spuren stammt vom Hinterrad? (In *The Adventure of the Priory School* gibt Sherlock Holmes eine falsche Antwort auf diese Frage.)



Abgabe: Mittwoch, 10.12.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).