WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (a) Sei $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \varphi(x) \cdot (x - x_0)^n,$$

wobei φ eine Funktion mit $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ ist.

(b) Wenden Sie (a) auf die Funktion $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + x}$ mit $x_0 = 0$ und $n = 1$ an. Zeigen Sie damit, daß

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2},$$

vergl. Übungsblatt 7, Aufgabe 4.

Aufgabe 2. Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a < b$. Zeigen Sie mittels Riemannscher Unter- und Obersummen, daß die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Riemann-integrierbar ist, und daß der Wert des Integrals gegeben ist durch

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3} \left(b^3 - a^3\right).$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegung $Z_n = (x_0, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$x_i = a + i\frac{b - a}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Zeigen Sie die Existenz der Grenzwerte von $U(Z_n, f)$ und $O(Z_n, f)$ für $n \to \infty$, und daß beide Grenzwerte gleich $(b^3 - a^3)/3$ sind.

Bonusaufgabe. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Setze

$$f_+(x) = \max\bigl(f(x), 0\bigr),$$

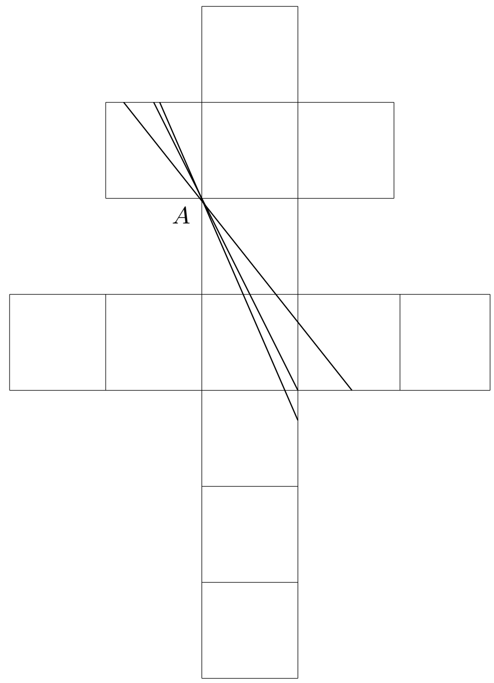
das heißt

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{falls } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Analog definieren wir $f_-(x) = -\min\bigl(f(x), 0\bigr)$. Zeigen Sie, daß die Funktionen f_+, f_- und $|f|$ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar sind.

b.w.

Knobelaufgabe (Fürs Warten aufs Christkind)**.** Gegeben sei ein aus 13 Quadraten aufgebautes Erzbischofskreuz. Gesucht ist eine Gerade durch den Punkt A, die das Kreuz in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt. Bestimmen Sie diese Gerade, und geben Sie eine Konstruktion dieser Geraden mit Zirkel und Lineal an.



Außer Konkurrenz noch folgende Quiz-Frage: Welche elementare Funktion wird hier besungen? Das Gedicht stammt von H. Cremer.

> Du schleichst seit undenklichen Zeiten
> so leis und so sanft heran,
> Du stiegst in Ewigkeiten
> kaum um ein δ an.
> Nur langsam beginnst Du zu wachsen,
> wie zum Beweis Deines Seins,
> erreichst beim Schnittpunkt der Achsen
> Deine höchste Steigung, die Eins.
> Dann duckst Du Dich wieder zierlich,
> in stiller Bescheidenheit
> und wandelst weiter manierlich
> in die Unendlichkeit.
>
> Hier stock ich im Lobgesange,
> mir schwant, er wird mir vermiest:
> Oh, [...]-Schlange,
> beißt Du nicht doch, Du Biest?!

Abgabe: **Mittwoch, 14.1.15**
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).