WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Finden Sie mittels einer geeigneten Integrationsmethode eine Stammfunktion der folgenden Funktionen f:

(i) Für $n \in \mathbb{Z}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = (\log x)^n$, $x \in \mathbb{R}^+$
(Hinweis: partielle Integration für $n = 1$, dann rekursive Formel)

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$

(iv) $f(x) = (\sin x)^5$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2. (a) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f, indem Sie f zunächst in der Form

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ geeignet darstellen.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)^2}.$$

Schreiben Sie f in der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geeignet. Bestimmen Sie dann eine Stammfunktion von f.

Bemerkung. Das in diesen Beispielen angegebene Verfahren heißt **Partialbruchzerlegung**. Allgemein läßt sich jede rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ mit reellen Polynomen p, q, wobei der Grad von p kleiner ist als der von q, als Summe von Termen der Form

$$\frac{sx+t}{(x-c)^k} \qquad \text{oder} \qquad \frac{sx+t}{(ax^2+bx+c)^k}$$

schreiben, wobei $x - c$ bzw. $ax^2 + bx + c$ mit $4ac - b^2 > 0$ (d.h. $ax^2 + bx + c$ ohne reelle Nullstelle) die Faktoren von $q(x)$ sind, und k bis zu der Potenz läuft, mit der der entsprechende Faktor in $q(x)$ auftritt.

b.w.

Aufgabe 3. Für $z \in \mathbb{C}$ hatten wir $\cos z$ und $\sin z$ definiert durch

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von cos und sin:

(i) Additionstheoreme: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

(ii) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4. (a) Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^b := \exp(b \log a)$. Zeigen Sie:

(i) Für $b = p/q \in \mathbb{Q}$ stimmt diese Definition mit der früheren als $a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ überein.

(ii) $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$, $(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$, $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.

(iii) Für $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^b$, differenzierbar mit $f'(x) = bx^{b-1}$.

(iv) Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$, differenzierbar mit $g'(x) = \log(a) \cdot a^x$.

(b) Die Umkehrfunktion zu $x \mapsto a^x$ ist der **Logarithmus zur Basis** a, geschrieben als $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Bonusaufgabe. Zeigen Sie vermöge partieller Integration und des Majorantenkriteriums die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

wobei der Integrand $(\sin x)/x$ in $x = 0$ als 1 gesetzt wird, so daß der Integrand auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist. Der tatsächliche Wert des Integrals soll nicht bestimmt werden.

Bonusaufgabe. (a) Zeigen Sie mittels der Ungleichung

$$\int_1^x \frac{dt}{t} \le \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}\,,$$

daß $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$. Können Sie dies auch direkter zeigen, indem Sie benutzen, daß $\exp(x)$ schneller wächst als jede Potenz von x? Es gilt nämlich für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} \ge \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } x \ge 0,$$

und damit $\exp(x)/x^n \to \infty$ für $x \to \infty$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x$. Hierbei bedeutet $x \to 0^+$, daß man zur Bestimmung des Grenzwertes (und zum Beweis seiner Existenz) nur solche Nullfolgen (x_n) betrachtet, für die $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Abgabe: Mittwoch, 21.1.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).