WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 14

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \log 2,$$

indem Sie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

geeignet als Untersumme eines Integrals interpretieren.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Mit (a) ergibt sich dann die berühmte Identität

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit einer ähnlichen Überlegung wie in Aufgabe 1, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 3. Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann erklärt man das Integral der komplexwertigen Funktion $f + \mathrm{i}g$ durch

$$\int_a^b \big(f(x) + \mathrm{i}g(x)\big)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx + \mathrm{i}\int_a^b g(x)\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, daß für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \exp\big((s+\mathrm{i}t)x\big)\,dx$ existiert und den Wert

$$\int_0^\infty \exp\big((s+\mathrm{i}t)x\big)\,dx = -\frac{1}{s+\mathrm{i}t}$$

besitzt. Verwenden Sie hierzu, daß man das Integral über einem kompakten Intervall wie für reellwertige Funktionen mittels einer Stammfunktion berechnen kann.

(b) Folgern Sie die Identitäten

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(sx)\cdot\cos(tx)\,dx &= \frac{-s}{s^2+t^2},\\
\int_0^\infty \exp(sx)\cdot\sin(tx)\,dx &= \frac{t}{s^2+t^2}
\end{aligned}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$.

Abgabe: Mittwoch, 28.1.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).