WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 0

Die Konvergenz von Funktionenfolgen spielt eine essentielle Rolle bei der Konstruktion des Lebesgue-Integrals. Wiederholen Sie dazu die Begriffe 'punktweise Konvergenz' und 'gleichmäßige Konvergenz' aus Abschnitt 8.2 meiner Analysis I (siehe dazu das Skript 'Mathematik I' in der Bibliothek des MI).

Aufgabe 1. Welche der folgenden reellen Funktionenfolgen (f_n) auf $\mathbb{R}_0^+$ konvergieren punktweise bzw. gleichmäßig?

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

(ii) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$

(iii) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

Aufgabe 2. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge (f_n) auf $\mathbb{R}_0^+$ mit

$$f_n(x) = n^c \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-nx}$$

punktweise bzw. gleichmäßig? Gibt es Teilmengen, auf denen (f_n) gleichmäßig konvergiert?

Auch die Grundbegriffe der Topologie aus der Analysis II sind von fundamentaler Bedeutung. Begriffe wie topologische Räume, offene Mengen, kompakte Mengen, Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen etc. sollten Sie parat haben. Hier ein Beispiel, das die Konvergenz von Funktionenfolgen mit der Topologie in Beziehung setzt.

Aufgabe 3. Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon K \to \mathbb{R}$, die punktweise und monoton (wachsend oder fallend) gegen eine *stetige* Grenzfunktion f konvergiert. Zeigen Sie, daß (f_n) dann sogar gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Durch Übergang zu $\pm(f_n - f)$ genügt es, den Fall zu betrachten, daß f_n monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert. Wählen Sie eine Maximalstelle $x_n \in K$ von f_n (warum existiert diese?).

Dieses Blatt wird in der ersten Übung am 2. November besprochen. Lösungen sind vorab nicht abzugeben.