WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß jede Riemann-integrable Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auch Lebesgue-integrabel ist bzgl. des eindimensionalen Lebesgue-Maßes auf $[a,b]$. Interpretieren Sie dazu die Riemannschen Unter- und Obersummen als eine aufsteigende Folge (φ_n) bzw. absteigende Folge (ψ_n) mit punktweisem Grenzwert φ bzw. ψ, und verwenden Sie den Satz über monotone Konvergenz.

Da das Lebesgue-Integral die Axiome des Riemann-Integrals erfüllt und die gleiche Normierung auf konstanten Funktionen besitzt, stimmen dann Riemann- und Lebesgue-Integral überein.

Aufgabe 2. (a) In einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sei eine aufsteigende Folge (M_n) meßbarer Mengen gegeben, und auf $M := \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ sei eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, daß f genau dann über M integrabel ist, wenn f über jedem M_n integrabel ist und die Folge $(\int_{M_n} |f|\, d\mu)$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, daß in diesem Fall

$$\int_M f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f\, d\mu$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, daß eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, die auf jedem kompakten Teilintervall integrabel ist, genau dann auf (a,b) Lebesgue-integrabel ist, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

existiert. Hinweis: Wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

läßt sich der Integrand stetig nach $x = 0$ fortsetzen. Es genügt daher, den Grenzwert

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u \frac{\sin x}{x}\, dx$$

zu untersuchen für ein festes $a > 0$. Verwenden Sie dazu partielle Integration und dann Majorisierung durch eine konvergente Reihe.

(d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) := (\sin x)/x$ auf $\mathbb{R}_0^+$ nicht Lebesgue-integrabel ist. Hinweis: Wäre f integrabel, so auch $|f|$. Benutzen Sie die Abschätzung

$$\frac{|\sin x|}{x} > \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \quad \text{für } x \in \big[k\pi, (k+1)\pi\big)$$

und Minorisierung des Integrals von $|f|$ durch eine divergente Reihe.

b.w.

Aufgabe 3. Wir hatten mit der Dirichlet-Funktion ein Beispiel einer Lebesgue-integrablen aber nicht Riemann-integrablen Funktion gesehen. Allerdings unterscheidet sich die Dirichlet-Funktion von der Funktion identisch Null nur auf einer Nullmenge. Mit anderen Worten: Nach Abändern auf einer geeigneten Nullmenge (hier: setze die Funktion auf $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ebenfalls gleich 0 statt 1) würde die Dirichlet-Funktion Riemann-integrabel. Das folgende Beispiel zeigt, daß dies im allgemeinen nicht möglich ist.

Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $Q := \mathbb{Q} \cap (0,1)$ und U_n ein offenes Intervall in $(0,1)$ um q_n der Länge höchstens $\varepsilon/2^n$, wobei ein positives $\varepsilon < 1$ gegeben sein soll. Setze $U := \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, und $f := \chi_U$, die charakteristische Funktion von U. Zeigen Sie:

(a) f ist Lebesgue-integrabel.

(b) f ist nicht Riemann-integrabel, auch nicht nach Abänderung der Funktion auf einer Nullmenge.

Aufgabe 4. Es sei (a_n) eine Folge im Intervall $(0,1)$ mit $1/2n^2 < a_n < 1 - 1/2n^2$. Die Funktion $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3(x - a_n + 1/2n^2) & \text{für } a_n - 1/2n^2 \le x \le a_n, \\ n - 2n^3(x - a_n) & \text{für } a_n \le x \le a_n + 1/2n^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion.

(b) Zeigen Sie, daß (f_n) eine L^1-Cauchyfolge ist. Gegen welche Funktion konvergiert (f_n) in der L^1-Norm?

(c) Zeigen Sie, daß, unabhängig von der Wahl der Folge (a_n), stets eine Teilfolge von (f_n) existiert, die mit der Ausnahme eines Punktes in $(0,1)$ punktweise konvergiert, und gleichmäßig außerhalb einer Menge von beliebig kleinem Maß.

(c) Sei analog eine Folge (f_n) mit ‘Spitzen’ der Breite $1/n$ und Höhe 1 definiert. Beschreiben Sie diese Funktionen explizit. Zeigen Sie, daß man die Folge (a_n) so wählen kann, daß die Folge (f_n) nicht punktweise f.ü. konvergiert.

Bonusaufgabe. Ziel dieser Aufgabe ist es, das uneigentliche Riemann-Integral aus Aufgabe 2(c) explizit zu berechnen.

(a) Zeigen Sie, daß für $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \exp\big((s + \mathrm{i}t)x\big)\, dx$$

existiert und den Wert

$$-\frac{1}{s + \mathrm{i}t}$$

hat.

(b) Folgern Sie, daß (mit s, t wie in (a))

$$\int_0^\infty \exp(sx) \sin(tx)\, dx = \frac{t}{s^2 + t^2}.$$

(c) Betrachten Sie das parameterabhängige uneigentliche Riemann-Integral

$$F(u) = \int_0^\infty \exp(-ux) \frac{\sin x}{x}\, dx$$

für $u \ge 0$. Benutzen Sie die Theorie der Differentiation von parameterabhängigen Integralen, um

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

zu zeigen.

Abgabe: Mittwoch, 25.11.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).