WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ der vollständige Maßraum der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß λ, den wir mittels des Maßerweiterungssatzes konstruiert hatten. Zeigen Sie, daß der Produktraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, \lambda\otimes\lambda)$ nicht vollständig ist, indem Sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ beschreiben, deren äußeres Lebesgue-Maß null ist — d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endliche Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ mit $M \subset \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\otimes\lambda)(Q_n) < \varepsilon$ —, die aber nicht $\lambda\otimes\lambda$-meßbar ist.

Hinweis: Nach Lemma 3.2 der Vorlesung ist für eine $\lambda\otimes\lambda$-meßbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ die Menge

$$N_y := \big\{x \in \mathbb{R} \colon\ (x, y) \in N\big\}$$

λ-meßbar für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Dieses Beispiel zeigt, daß der Produktraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, \lambda\otimes\lambda)$ nicht identisch ist mit dem vollständigen Maßraum, den man erhält, indem man von dem Mengenring der endlichen Vereinigungen von endlichen Quadern im $\mathbb{R}^2$ ausgeht, und dann durch Maßerweiterung einen vollständigen Raum Lebesgue-meßbarer Teilmengen konstruiert.

Aufgabe 2. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere eine abzählbare Familie von Quadern $Q_1, Q_2, \ldots$ mit $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q_j) < \varepsilon$, wobei λ das n-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet, also $\lambda(Q_j) =$ Produkt der Kantenlängen.

(a) Zeigen Sie, daß die abzählbare Vereinigung $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ von Nullmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.

(b) Sei $f \colon A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, d.h. es existiere eine Konstante L, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Zeigen Sie, daß dann auch $f(A)$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung: Diese Aussage ist i.a. falsch, wenn die Abbildung f nur stetig ist. Zum Beispiel gibt es eine surjektive stetige Abbildung eines Intervalles auf ein Quadrat.

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß f lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, d.h. zu jedem Punkt $p \in U$ gibt es eine Umgebung, auf der f Lipschitz-stetig ist.

(d) Folgern Sie: Ist $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Umgebung $U \supset A$ der Nullmenge A, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.

(e) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $g \colon M \to \mathbb{R}$ meßbar. Zeigen Sie mittels des Cavalierischen Prinzips, daß der Graph

$$\big\{(x, g(x)) \colon\ x \in M\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Nullmenge ist. Insbesondere sind damit Untermannigfaltigkeiten positiver Kodimension stets Nullmengen.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine integrable Funktion und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß durch

$$\mu(Y) := \int_Y f\, d\lambda$$

ein Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Konstruieren Sie ein Maß auf $\mathbb{R}$, für das gilt:

(i) $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

(ii) $N \subset \mathbb{R}$ ist Nullmenge für μ genau dann, wenn N Nullmenge für λ ist.

Aufgabe 4. In der Analysis I hatten wir die Γ-Funktion $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kennengelernt, die die Integraldarstellung

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

besitzt. Wir wollen für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ zeigen, daß Γ im Intervall $(0, 2a)$, d.h. für $|h| < a$, die Potenzreihenentwicklung

$$\Gamma(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{k!} \int_0^\infty t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} (\log t)^k\, dt$$

besitzt.

(a) Zeigen Sie, daß für $h \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt:

$$t^{a+h-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log t)^k}{k!} h^k.$$

(b) Setze

$$f_n(t) := t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log t)^k}{k!} h^k.$$

Zeigen Sie, daß für jedes $\delta > 0$ und $|h| \le \delta$ jede Funktion f_n majorisiert wird durch die Funktion F, gegeben durch

$$F(t) := \begin{cases} t^{a+\delta-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \ge 1, \\ t^{a-\delta-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \in (0,1). \end{cases}$$

(c) Verifizieren Sie, daß die Majorante F für $0 < \delta < a$ über $\mathbb{R}^+$ integrabel ist.

(d) Folgern Sie mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue die angegebene Reihenentwicklung für $\Gamma(a+h)$.

Abgabe: Mittwoch, 2.12.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).