WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $\omega = f(x)\,dx$ eine C^∞ 1-Form auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß es eine reelle Zahl p und eine C^∞-Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß sich ω schreiben lässt als

$$\omega = p\,dx + dg.$$

Dies zeigt, daß die erste de Rham-Kohomologiegruppe $H^1(S^1)$ der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^1 (d.h. des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) isomorph zu $\mathbb{R}$ ist, da man $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (oder $[0,1]/0 \sim 1$) mit S^1 identifizieren kann vermöge der wohldefinierten Abbildung $[x] \mapsto \exp(2\pi i x)$, wobei $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die durch $x \in \mathbb{R}$ repräsentierte Äquivalenzklasse bezeichnet.

Aufgabe 2. (a) Sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form. Es gebe einen Kreis um den Nullpunkt, so daß das Integral von ω längs dieses Kreises gleich 0 ist. Zeigen Sie, daß dann $\int_\gamma \omega = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d.h. ω ist exakt.

(b) Es sei (u,v) ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d.h.

$$p \longmapsto (u(p), v(p)) \in \mathbb{R}^2 = T_pU$$

ist eine C^1-Abbildung. Es gelte $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß es dann eine reelle Zahl c gibt, so daß das Vektorfeld

$$\Big(u(x,y) - c\frac{y}{x^2+y^2}, v(x,y) + c\frac{x}{x^2+y^2}\Big)$$

konservativ ist. Dies ist eine alternative Interpretation der Aussage $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (a) Sei ω eine 2-Form auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V. Zeigen Sie, daß es eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von V^* und eine natürliche Zahl k mit $2k \leq n$ gibt, so daß

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2k-1} \wedge \alpha_{2k}.$$

(b) Zeigen Sie, daß k eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft

$$\omega^k \neq 0, \quad \omega^{k+1} = 0.$$

Aufgabe 4. Die 'nördliche' Hemisphäre der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei mittels der stereographischen Projektion vom 'Südpol' aus parametrisiert, d.h. für $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 < 1$ sei $\Phi(u, v)$ der Schnittpunkt von S^2 mit der Geraden durch die Punkte $(u, v, 0)$ und $(0, 0, -1)$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\{u^2+v^2<1\}} \Phi^*\omega$ für die 2-Form

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy,$$

wobei man für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definiert: $\int_\Omega f(u, v)\, du \wedge dv := \int_\Omega f(u, v)\, du\, dv$.

Abgabe: Mittwoch, 13.1.16
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).