WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Viele Größen der lokalen Differentialgeometrie einer Fläche M werden nicht als Funktionen des Punktes $p \in M$ (oder p im Bild $\mathbf{x}(U) = U' \subset M$ einer lokalen Parametrisierung als Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \xrightarrow{\cong} U' \subset M$) aufgefaßt, sondern als Funktionen der Parameter $(u^1, u^2) \subset U$. Der Einheitsnormalenvektor an eine Fläche ist hierfür ein Beispiel.

Bei dieser Vorgehensweise muß man, wie wir das auch für den Einheitsnormalenvektor und die Tangentialebene getan haben, stets verifizieren, daß der fragliche Begriff nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt. Nur dann hat dieser Begriff eine echte geometrische Bedeutung.

Allgemein muß man daher studieren, wie sich die parametrische Beschreibung geometrischer Objekte unter Koordinatentransformationen ändert. In dieser Aufgabe soll dies anhand der Beschreibung von Tangentialvektoren bezüglich der durch eine lokale Parametrisierung gegebenen Basis des Tangentialraumes studiert werden. Seien also $\mathbf{x}\colon U \xrightarrow{\cong} U' \subset M$ und $\mathbf{y}\colon V \xrightarrow{\cong} V' = U' \subset M$ zwei lokale Parametrisierungen, die sich durch eine Koordinatentransformation $f\colon V \to U$ unterscheiden, d.h. $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$. Schreibe einen Tangentialvektor in einem Punkt $p \in U'$ als $\mathbf{X} = X^i \mathbf{x}_i = Y^\alpha \mathbf{y}_\alpha$.

Wir schreiben f in der Form $(v_1, v_2) \mapsto \big(u^1(v^1, v^2), u^2(v^1, v^2)\big)$. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Kettenregel

$$\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{x}_i \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha},$$

daß gilt:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = J(f) \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich die ‘Definition des Physikers’ für Tangentialvektoren: ein Tangentialvektor ist ein 2-Tupel, das bei Koordinatenwechseln durch Anwendung der Jacobischen des Koordinatenwechsels transformiert.

Aufgabe 2. Sei

$$U = M = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, 0)\colon\ x \leq 0\big\}$$

und $\mathbf{x}\colon U \to M$ die Parametrisierung mittels cartesischer Koordinaten (x, y). Sei weiter

$$V = \big\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\colon\ r > 0,\ \varphi \in (-\pi, \pi)\big\}.$$

Zeigen Sie, daß durch den Übergang zu Polarkoordinaten, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, eine Koordinatentransformation $V \to U$ definiert wird. Bestimmen Sie die metrischen Koeffizienten bzgl. der beiden Parametrisierungen von M.

b.w.

Aufgabe 3. Betrachten Sie das parametrische Flächenstück

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)\,, \quad r \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Komponenten des metrischen Tensors (g_{ij}). Sei $\boldsymbol{\alpha}(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = \mathrm{e}^{t(\cot\theta)/2}$ und $\varphi(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, \pi]$ und einer Konstanten θ. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, daß θ der Winkel zwischen der Kurve $\boldsymbol{\alpha}(t)$ und den Kurven $\varphi =$ konst. auf dem Flächenstück ist.

Aufgabe 4. Man betrachte eine Kurve in der (r,z)-Ebene gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a,b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die z-Achse gedreht wird, erhalten wir eine **Rotationsfläche**. Diese Fläche können wir wie folgt parametrisieren. Dazu ist es nützlich, die Parameter t und φ zu verwenden, wobei t die Position auf der Kurve bestimmt und φ den Drehwinkel. Dann können wir definieren

$$\mathbf{x}(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t)) \quad \text{für } t \in (a,b) \text{ und } \varphi \in (0, 2\pi).$$

Die t-Kurven heißen **Meridiane** und die φ-Kurven **Breitenkreise**.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{x}$ ein parametrisches Flächenstück ist, falls $\boldsymbol{\alpha}$ regulär und injektiv ist. Berechnen Sie $\mathbf{x}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial t$, $\mathbf{x}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial\varphi$ und den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$.

(b) Betrachten Sie die zu $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, daß die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und beschreiben Sie die dort genannten Größen explizit. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten einer Rotationsfläche.

Abgabe: Mittwoch, 16.11.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).