Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $f\colon V \to U$ eine Koordinatentransformation. Mit L_{ij}, Γ_{ij}^k seien die zweite Fundamentalform bzw. die Christoffelsymbole des Flächenstücks $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ bezeichnet, mit $\overline{L}_{\alpha\beta}, \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ die entsprechenden Größen für $\mathbf{y}\colon V \to \mathbb{R}^3$, wobei $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Bis auf das Vorzeichen von $\det\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right)$ transformiert sich L_{ij} wie g_{ij}:

$$L_{ij} = \pm \overline{L}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j}$$

(b) Die Christoffelsymbole transformieren sich wie folgt:

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right) \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}.$$

Aufgabe 2. Sei $\boldsymbol{\gamma}$ eine Kurve mit Spur auf S^2. Zeigen Sie:

(a) k_n ist konstant.

(b) Ist k_g konstant, dann ist $\boldsymbol{\gamma}$ ein Kreis.

(c) Ist $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische, d.h. $k_g \equiv 0$, dann ist $\boldsymbol{\gamma}$ ein Großkreis.

Aufgabe 3. Man bilde den Durchschnitt des Zylinders $\{x^2 + y^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ mit einer Ebene, die die x-Achse enthält und einen Winkel θ mit der xy-Ebene bildet.

(a) Zeigen Sie, daß die Schnittkurve $\boldsymbol{\gamma}$ eine Ellipse ist.

(b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung von $\boldsymbol{\gamma}$, aufgefaßt als Kurve im Zylinder, in den Punkten, in denen die Ellipse ihre Achsen schneidet.

Aufgabe 4.

(a) Betrachte die 2-Sphäre S^2 (ohne den Nullmeridian) mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

In der Vorlesung hatten wir ausgerechnet, daß die Koeffizienten des metrischen Tensors gegeben sind durch

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einträge g^{ij} der inversen Matrix, die Koeffizienten L_{ij} der zweiten Fundamentalform und die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k. Begründen Sie geometrisch, warum keine dieser Größen von φ abhängt.

(b) Betrachte eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 4. Zeigen Sie:

(i) Die Matrix (L_{ij}), die die zweite Fundamentalform beschreibt, ist gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{r} & 0 \\ 0 & r\dot{z} \end{pmatrix}.$$

(ii) Es gilt $\det(L_{ij}) = 0$ genau dann, wenn jeder Meridian eine Gerade ist.

Abgabe: Mittwoch, 23.11.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).