WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

(a) Sei M eine Fläche und Π eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die M in einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ schneidet. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist, falls Π eine Symmetrieebene von M ist.

(b) Zeigen Sie, daß jede Gerade im $\mathbb{R}^3$, die in einer Fläche enthalten ist, auf dieser Fläche eine Geodätische ist.

(c) Sei M die Fläche $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Finden Sie möglichst viele Geodätische auf M.

Aufgabe 2. Betrachten Sie ein Flächenstück von der Form

$$\mathbf{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, f(u^1, u^2)\right),$$

d.h. einen Graphen. Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform (g_{ij}), (L_{ij}). Bestimmen Sie das Christoffel-Symbol Γ^2_{11} sowohl extrinsisch (d.h. mittels der ursprünglichen Definition) als auch intrinsisch (d.h. mittels Satz 3.5).

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine Kurve auf einer Fläche M von $p = \boldsymbol{\alpha}(0)$ nach $q = \boldsymbol{\alpha}(1)$. Für $\mathbf{X}_0 \in T_pM$ sei $\mathbf{X}(t)$, $t \in [0,1]$, die Parallelverschiebung von $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ entlang $\boldsymbol{\alpha}$. Definiere $\boldsymbol{\alpha}^\sharp \colon T_pM \to T_qM$ durch $\boldsymbol{\alpha}^\sharp(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}(1)$. Zeigen Sie:

(a) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist eine lineare Abbildung.

(b) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist eine Isometrie, d.h.

$$\langle \boldsymbol{\alpha}^\sharp(\mathbf{X}_0), \boldsymbol{\alpha}^\sharp(\mathbf{Y}_0)\rangle = \langle \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\rangle \text{ für alle } \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \in T_pM.$$

(c) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist ein Isomorphismus.

$\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ heißt der durch $\boldsymbol{\alpha}$ definierte Parallelismus.

Aufgabe 4. Man betrachte die obere Halbebene

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y > 0\right\}$$

mit der durch $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ gegebenen sogenannten **hyperbolischen Metrik**.

Bemerkung. Man kann zeigen, daß sich $\mathbb{R}^2_+$ mit dieser Metrik nicht als Fläche im $\mathbb{R}^3$ realisieren läßt, d.h. es gibt kein parametrisches Flächenstück $\mathbf{x}\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle$. Dennoch lassen sich alle intrinsischen Überlegungen bezgl. dieser Metrik durchführen.

(a) Verifizieren Sie die folgenden Ausdrücke für die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0,$$
$$\Gamma_{11}^2 = 1/y,$$
$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -1/y.$$

(b) Die Geodätische $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\left(\gamma^1(0), \gamma^2(0)\right) = (x_0, 1)$ und $\left((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)\right) = (0, 1)$ ist gegeben durch $\gamma^1 \equiv x_0$, $\gamma^2(s) = e^s$.

(c) Die Geodätische $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\left(\gamma^1(0), \gamma^2(0)\right) = (a, r)$ und $\left((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)\right) = (r, 0)$ ist gegeben durch $\gamma^1(s) = a + r \tanh s$, $\gamma^2(s) = \dfrac{r}{\cosh s}$. Zeigen Sie außerdem, daß $\boldsymbol{\gamma}$ ein Halbkreis in $\mathbb{R}_+^2$ (bzgl. der euklidischen Metrik) ist mit Mittelpunkt auf der $x-$Achse.

(d) Sei $\mathbf{X}_0 = (0, 1)$ ein Tangentialvektor im Punkt $(0, 1)$ von $\mathbb{R}_+^2$. ($\mathbf{X}_0$ ist Einheitsvektor in $T_{(0,1)}\mathbb{R}_+^2$ bezgl. der hyperbolischen Metrik.) Sei $\mathbf{X}(t)$ die Parallelverschiebung von $\mathbf{X}_0$ längs der Kurve $x = t$, $y = 1$. Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen $\mathbf{X}(t)$ und der y-Achse gleich t ist.

Bonusaufgabe.

(a) Sei $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück. Ein differenzierbares **Vektorfeld** auf der Fläche $M = \mathbf{x}(U)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{X}\left(u^1, u^2\right) = X^j\left(u^1, u^2\right)\mathbf{x}_j\left(u^1, u^2\right),$$

wobei X^1 und X^2 differenzierbare Funktionen $U \to \mathbb{R}$ sind. Dies bedeutet, daß $\mathbf{X}\left(u^1, u^2\right)$ ein Vektor in der Tangentialebene an M im Punkt $\mathbf{x}\left(u^1, u^2\right)$ ist. Sei nun $\mathbf{y}\colon V \to \mathbb{R}^3$ eine weitere Parametrisierung dieses Flächenstücks, d.h. $\mathbf{x}(U) = \mathbf{y}(V)$. Gegeben seien zwei differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{X} = X^j\mathbf{x}_j = \overline{X}^\beta\mathbf{y}_\beta$ und $\mathbf{Y} = Y^i\mathbf{x}_i = \overline{Y}^\alpha\mathbf{y}_\alpha$. Definiere

$$Z^k = \frac{\partial Y^k}{\partial u^j}X^j + \Gamma_{ij}^k Y^i X^j$$

und

$$\overline{Z}^\gamma = \frac{\partial \overline{Y}^\gamma}{\partial v^\beta}\overline{X}^\beta + \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \overline{Y}^\alpha \overline{X}^\beta.$$

Beweisen Sie $\overline{Z}^\gamma = Z^k \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}$. Dies zeigt, daß $Z^k\mathbf{x}_k = \overline{Z}^\gamma\mathbf{y}_\gamma$ ein Vektorfeld $\mathbf{Z}$ definiert. Man nennt $\mathbf{Z}$ die **kovariante Ableitung** von $\mathbf{Y}$ bzgl. $\mathbf{X}$ und schreibt $Z = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$. Dies ist einer der wichtigsten Begriffe der modernen Differentialgeometrie; er wurde 1917 von Tullio Levi-Civita eingeführt.

(b) Sei $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\right)$ eine Kurve in der Fläche M und $\mathbf{X}(t) = \dot{\gamma}(t)$. Sei ein Vektorfeld entlang $\boldsymbol{\gamma}$ definiert durch $\mathbf{Y}(t) = Y^i(t)\mathbf{x}_i\left(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\right)$. Zeigen Sie, daß für diesen Spezialfall gilt: $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \left(\dot{Y}^k + \Gamma_{ij}^k Y^i \dot{\gamma}^j\right)\mathbf{x}_k$. In dieser speziellen Form werden wir die kovariante Ableitung in der Vorlesung zuerst kennenlernen.

Abgabe: Mittwoch, 30.11.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).