WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (a) Sei $\boldsymbol{\gamma}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche M, und sei $\mathbf{S}$ die intrinsische Normale entlang $\boldsymbol{\gamma}$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{S}$ genau dann parallel entlang $\boldsymbol{\gamma}$ ist, wenn $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist.

(b) Sei $\boldsymbol{\gamma}$ wie in (a), mit Krümmung $k \neq 0$. Sei $\mathbf{X}_N$ die Komponente von $\mathbf{N}$ tangential an M. Zeigen Sie, daß $\mathbf{X}_N = \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$, und daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbf{X}_N \equiv 0$,

(ii) $\boldsymbol{\gamma}$ ist eine Geodätische,

(iii) $\mathbf{X}_N$ ist parallel entlang $\boldsymbol{\gamma}$.

Aufgabe 2. Ein Einheitsvektor $\mathbf{X} \in T_pM$ heißt **asymptotische Richtung**, falls $\mathrm{II}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$. Eine **asymptotische Kurve** auf der Fläche M ist eine reguläre Kurve, deren Einheitstangentialvektor in jedem Kurvenpunkt eine asymptotische Richtung von M repräsentiert. Zeigen Sie:

(a) Eine Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ mit Krümmung $k \neq 0$ und Spur auf einer Fläche M ist eine asymptotische Kurve genau dann, wenn die Schmiegebene von $\boldsymbol{\alpha}$ in jedem Kurvenpunkt mit der Tangentialebene von M zusammenfällt.

(b) Jede Gerade auf einer Fläche ist eine asymptotische Kurve.

(c) Eine Geodätische ist eine asymptotische Kurve genau dann, wenn sie eine Gerade ist.

(d) Alle asymptotischen Kurven im Flächenstück $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ sind Geraden.

Aufgabe 3. Der 2-Torus T^2 ist die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation des Kreises $(r-2)^2 + z^2 = 1$ in der (r, z)-Ebene um die z-Achse entsteht. Er läßt sich (bis auf einen Meridian und einen Längenkreis) parametrisieren durch

$$\mathbf{x}(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u), \quad (u, v) \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingarten-Abbildung der 2-Sphäre vom Radius r mittels der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) \quad \text{für } (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

(b) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform des Helikoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$$

und des Katenoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av).$$

Hier sind a und c positive reelle Konstanten.

Bonusaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß aus $g_{12} \equiv L_{12} \equiv 0$ folgt, daß die u^i-Kurven Krümmungslinien sind.

(b) Zeigen Sie, daß außerhalb von Nabelpunkten die Umkehrung von (a) gilt. Was passiert in Nabelpunkten?

(c) Zeigen Sie, daß Breitenkreise und Meridiane einer Rotationsfläche Krümmungslinien sind.

Abgabe: Mittwoch, 7.12.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).