WS 2017/18

Prof. Hansjörg Geiges
Sebastian Durst, M.Sc.

Geometrische Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & 2(z+1/z) \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, daß f eine verzweigte Überlagerung ist. Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und deren Vielfachheit.

(b) Beschreiben Sie das Bild der auf den Kreisring $\{z \in \mathbb{C}\colon 1/2 < |z| < 2\}$ eingeschränkten Abbildung f.

Aufgabe 2. Für $g, h \geq 2$ gibt es eine (unverzweigte) Überlagerung $\Sigma_g \to \Sigma_h$ genau dann, wenn $h-1$ ein Teiler von $g-1$ ist.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie die Riemann–Hurwitz-Formel für die in der Vorlesung konstruierten verzweigten Überlagerungen $\Sigma_g \to S^2$ mit drei Verzweigungspunkten, d.h. für die explizit beschriebene Überlagerung wie auch für die ausgehend von einer Triangulierung von Σ_g konstruierbare Überlagerung.

Aufgabe 4. (a) Geben Sie eine topologische Beschreibung für eine verzweigte 3-fache Überlagerung

$$\text{Kreisring} \to D^2$$

mit drei Verzweigungspunkten unten und sechs Verzweigungspunkten oben.

Hinweis: Beschreiben Sie D^2 durch Verkleben von drei Paaren benachbarter Seiten eines Neuneckes, den Kreisring durch geeignetes Verkleben dreier Kopien dieses Neuneckes.

(b) Verifizieren Sie die Riemann–Hurwitz-Formel für dieses Beispiel.

Bonusaufgabe. Sei $f = u + \mathrm{i}v$ eine holomorphe Funktion in zwei komplexen Variablen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Dann hat die reelle Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{x_1} & u_{y_1} & u_{x_2} & u_{y_2} \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{x_2} & v_{y_2} \end{pmatrix}$$

vollen Rang (d.h. Rang 2) genau dann, wenn der komplexe Gradient

$$\nabla^{\mathbb{C}} f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$$

nicht verschwindet.

Abgabe: Mittwoch 13.12.17
bis spätestens 16:00 Uhr
im Büro 206 des MI