WS 2018/2019

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Extrablatt

Auf diesem Übungsblatt finden Sie Aufgaben zur Klausurvorbereitung. Die Aufgaben werden in den Vorlesungen am 25. und 29. Januar besprochen. In der Klausur werden darüber hinaus grundlegende Definitionen abgefragt. Sie sollten in der Lage sein, wesentliche Rechenregeln für Grenzwerte, Ableitungen und Integrale zu beweisen. Darüber hinaus sollten Sie mit den grundlegenden Sätzen über differenzierbare Funktionen (Kapitel 6) und deren Beweisen vertraut sein.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aufgabe 2. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ dar:

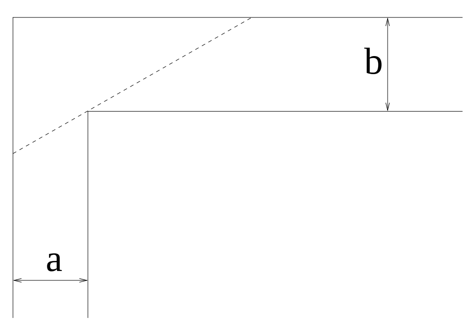
$$\text{(a)} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(b)} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Zahlenfolge

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4. Zwei Flure der Breite a bzw. b treffen sich in einem rechten Winkel wie im Bild gezeigt. Was ist die größtmögliche Länge einer Leiter, die man horizontal um diese Ecke bewegen kann?



b.w.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

Aufgabe 6. (a) Begründen Sie, warum die Funktion $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese nennen wir arccos. Zeigen Sie, daß $\sin(\arccos t) = \sqrt{1 - t^2}$ für $t \in [-1, 1]$.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

für $a, b \in [-1, 1]$. Benutzen Sie (a), um eine möglichst einfache Stammfunktion des Integranden anzugeben.