Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Übungsblatt 12

Präsenzaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty.$$

(b) Die allgemeine Potenz a^b für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$a^b := \exp(b \log a).$$

Begründen Sie, warum die Funktionen $x \mapsto x^b$, $x \in \mathbb{R}^+$, und $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ (für $b \in \mathbb{R}$ bzw. $a \in \mathbb{R}^+$) differenzierbar sind, und bestimmen Sie deren Ableitung.

Hausaufgabe 1. (a) Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, um folgenden **Mittelwertsatz der Integralrechnung** zu zeigen: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Zeigen Sie, wie man diesen Satz alternativ aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung herleiten kann.

(b) Zeigen Sie weiter: Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, so existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Hausaufgabe 2. Die Funktion f sei stetig und die Funktionen g und h seien differenzierbar. Zeigen Sie, daß durch

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

eine differenzierbare Funktion definiert wird, und drücken Sie die Ableitung F' durch die gegebenen Funktionen aus.

b.w.

Hausaufgabe 3. Finden Sie mittels einer geeigneten Integrationsmethode eine Stammfunktion der folgenden Funktionen f:

(i) Für $n \in \mathbb{Z}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = (\log x)^n$, $x \in \mathbb{R}^+$
(Hinweis: partielle Integration für $n = 1$, dann rekursive Formel)

(iii) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^4}}$, $x \in [0, 1)$

(iv) $f(x) = (\sin x)^5$, $x \in \mathbb{R}$

Bonusaufgabe. (a) Verifizieren Sie für die in der Präsenzaufgabe definierte allgemeine Potenz a^b die folgenden Eigenschaften:

(i) Für $b = p/q \in \mathbb{Q}$ stimmt diese Definition mit der früheren als $a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ überein.

(ii) $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$, $(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$, $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.

(b) Die Umkehrfunktion zu $x \mapsto a^x$ ist der **Logarithmus zur Basis** a, geschrieben als

$$\log_a \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß gilt

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 14.1.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!