

Analysis I

Übungsblatt 13

Präsenzaufgabe. Skizzieren Sie die ebene Kurve, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = 1 + 2 \cos \varphi$$

beschrieben wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt in jeder der beiden “Schleifen”, die von dieser Kurve gebildet werden.

Hausaufgabe 1. Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert. Ersetzen Sie dazu das Integral der Funktion $(\sin x)/x$ über dem Intervall $[1, R]$ mittels partieller Integration durch ein Integral, dessen Integrand geeignet abgeschätzt werden kann, so daß das Majorantenkriterium verwendet werden kann.

Hausaufgabe 2. (a) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \log 2,$$

indem Sie

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

geeignet als Untersumme eines Integrals interpretieren.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Mit (a) ergibt sich dann die berühmte Identität

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

b.w.

Hausaufgabe 3. Sei Δ ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge s in der Halbebene

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2: x > 0\}.$$

Dabei sei eine Kante parallel zur z -Achse und habe den Abstand $a \geq 0$ von der z -Achse. Die gegenüberliegende Ecke kann links oder rechts von dieser Kante liegen. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers im \mathbb{R}^3 , den man durch Rotation von Δ um die z -Achse erhält.

Bonusaufgabe. Seien $b, h \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der von der Ebene $\{z = h\}$ und dem Paraboloid $\{z = b(x^2 + y^2)\}$ berandet wird

- (a) mittels der Formel aus der Vorlesung für das Volumen von Rotationskörpern;
- (b) indem Sie wie bei der Integration in Polarkoordinaten argumentieren, daß das Volumen als ein Dreifachintegral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{c_0}^{c_1} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

mit geeigneten a, c_0, c_1 geschrieben werden kann, und Sie dann dieses Dreifachintegral explizit berechnen.

Bonusaufgabe. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Rotationsfläche im \mathbb{R}^3 , die als Rand des Rotationskörpers in Aufgabe 3 gegeben ist. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Abschätzung diese Flächeninhalts mit Unter- und Obersummen.

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 21.1.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

**Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an,
andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!**