WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der beschränkten Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ die Borelalgebra von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(\mathcal{S}_n)$ die von

$$\mathcal{S}_n := \big\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\big\}$$

erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) Die σ-Algebra $\mathcal{M}_n$ besteht genau aus den Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$, für die entweder $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ oder $A^c \subset \{1, 2, \dots, n\}$ gilt.

(b) Die Vereinigung $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ ist keine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$.

Aufgabe 3. (a) Es sei μ eine für alle achsenparallelen Rechtecke $Q \subset \mathbb{R}^2$ (mit oder ohne eines Teils der Randpunkte) erklärte nichtnegative reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) Ist Q in Q_1 und Q_2 zerlegt, so gilt $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$.

(ii) $\mu(\mathbf{x} + Q) = \mu(Q)$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(iii) $\mu([0, 1] \times [0, 1]) = 1$.

Zeigen Sie

$$\mu\big([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]\big) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := \mu\big([0, x] \times [0, 1]\big),$$

und stellen Sie eine Funktionalgleichung für f auf, aus der Sie $f(x) = x$ folgern können.

(b) Auf dem $\mathbb{R}^2$ definieren wir ein äußeres Maß μ^*, indem wir für $A \subset \mathbb{R}^2$ setzen:

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \colon\ Q_j \subset \mathbb{R}^2 \text{ achsenparallele Quader mit } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\Big\},$$

mit $\mu(Q)$ gleich dem elementargeometrischen Flächeninhalt wie in (a). Zeigen Sie, daß $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ eine μ^*-meßbare Teilmenge ist mit $\mu^*(\mathbb{R}) = 0$.

b.w.

Aufgabe 4. In der Vorlesung hatten wir gesehen, daß durch

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} L(I_j)\colon\ I_j \subset \mathbb{R} \text{ Intervalle mit } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\Big\},$$

ein äußeres Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert wird.

Man könnte auf die Idee kommen, folgende Definition von einem 'inneren Maß' zu geben:

$$\mu_*(A) := \sup \sum_{j=1}^{\infty} L(I_j),$$

wobei das Supremum über Folgen (I_j) von paarweise disjunkten Intervallen mit $\cup_j I_j \subset A$ genommen wird. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ könnte dann meßbar heißen, wenn $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt, und dieser gemeinsame Wert von innerem und äußerem Maß von A wäre dann das Maß dieser Menge.

Zeigen Sie, daß dieser Zugang für $A_1 := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ wie erwartet $\mu_*(A_1) = \mu^*(A_1) = 0$ liefert, für $A_2 := [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ dagegen $\mu_*(A_2) = 0$ und $\mu^*(A_2) = 1$. Damit wäre A_2 nicht meßbar. Zeigen Sie weiter, daß man insbesondere keine σ-Algebra von meßbaren Mengen erhalten würde.

Abgabe: Mittwoch, 23.10.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).