WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Menge der reellen Zahlen, deren Dezimalbruchentwicklung die Ziffer 2 enthält, Lebesgue-meßbar ist.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ konstruiert werden, die nicht Lebesgue-meßbar ist. Auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ betrachten wir die Relation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie:

(a) Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $R \subset [0,1]$ ein Vertretersystem für diese Äquivalenzrelation, d. h. R enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten. (Ein solches Vertretersystem wählen zu können, setzt das Auswahlaxiom voraus.) Wir wollen die Annahme, daß R meßbar ist, zu einem Widerspruch führen. Definiere

$$M = \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (q + R).$$

(b) Zeigen Sie, daß $[0,1] \subset M \subset [-1,2]$.

(c) Zeigen Sie — unter der Annahme, daß R Lebesgue-meßbar ist —, daß M meßbar ist mit Maß

$$\lambda(M) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(R).$$

(d) Folgern Sie, daß $\lambda(M) = 0$ oder $\lambda(M) = \infty$, im Widerspruch zu (b).

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß man zu jeder Lebesgue-meßbaren Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ (also $M \in \mathcal{L}$), Borelsche Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ (also $A, B \in \mathcal{B}$) finden kann mit $A \subset M \subset B$ und $\lambda(M \setminus A) = 0 = \lambda(B \setminus M)$. Folgern Sie, daß die Lebesgue-meßbaren Teilmengen M von $\mathbb{R}$ genau die Mengen sind, die sich schreiben lassen als $M = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{B}$ und N Teilmenge einer Borelschen Nullmenge.

b.w.

Aufgabe 4. Die **Cantormenge** $C \subset [0,1]$ ist wie folgt definiert. Entferne zunächst aus dem Intervall $[0,1]$ das offene Intervall $(1/3, 2/3)$. Aus den verbleibenden Intervallen $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$ entfernen wir wieder jeweils das offene mittlere Drittel, d.h. die Intervalle $(1/9, 2/9)$ und $(7/9, 8/9)$. Diesen Prozeß iterieren wir. Zeigen Sie:

(a) Die Elemente von C sind genau die Zahlen, die sich in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

mit $a_k \in \{0,2\}$ schreiben lassen. Zum Beispiel sind

$$\frac{1}{3} = 0,02222...$$

und

$$\frac{2}{3} = 0,20000...$$

(in ternärer Darstellung) Elemente von C.

(b) Jeder Punkt von C ist ein Häufungspunkt von C.

(c) Die Cantormenge ist kompakt.

(d) Sei $x \in C$ in der Darstellung von (a) gegeben. Begründen Sie, warum die durch

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$

gegebene Abbildung $\varphi\colon\ C \to [0,1]$ wohldefiniert, stetig, monoton und surjektiv ist.

(e) Folgern Sie mit (d), oder durch Variation des zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens aus der Analysis I, daß die Cantormenge die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat, also insbesondere überabzählbar ist.

(f) Die Menge C ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Bemerkung: Mit (d) und (f) kann man folgern, daß es mehr Nullmengen gibt als die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Andererseits kann man mittels der iterativen Konstruktion von Borelmengen zeigen, daß die Borelalgebra von $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat. Hieraus folgt die Existenz von Lebesgueschen Nullmengen, die keine Borelschen Mengen sind.

Abgabe: Mittwoch, 30.10.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).