WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ der vollständige Maßraum der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß λ, den wir über ein äußeres Maß konstruiert hatten. Zeigen Sie, daß der Produktraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, \lambda\otimes\lambda)$ nicht vollständig ist, indem Sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ beschreiben, deren äußeres Lebesgue-Maß null ist — d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endliche Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ mit $M \subset \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ und der Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\otimes\lambda)(Q_n) < \varepsilon$ —, die aber nicht $\lambda\otimes\lambda$-meßbar ist.

Hinweis: Wie in der Vorlesung diskutiert, ist für eine $\lambda\otimes\lambda$-meßbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $N_y := \{x \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in N\}$ λ-meßbar für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Dieses Beispiel zeigt, daß der Produktraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, \lambda\otimes\lambda)$ nicht identisch ist mit dem vollständigen Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_\eta, \eta)$ mit der σ-Algebra $\mathcal{M}_\eta$ aller η-meßbaren Teilmengen, wobei η das äußere Maß definiert mittels Überdeckungen durch Rechtecke ist, denn dieser Maßraum ist vollständig nach Lemma 1.5 der Vorlesung. Sowohl $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ also auch $\mathcal{M}_\eta$ enthalten aber die Borelalgebra von $\mathbb{R}^2$, und dort stimmen $\lambda\otimes\lambda$ und η nach Konstruktion des Produktmaßes überein.

Aufgabe 2. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine integrable Funktion und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß durch

$$\mu(Y) := \int_Y f\, d\lambda$$

ein Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Konstruieren Sie ein Maß auf $\mathbb{R}$, für das gilt:

(i) $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

(ii) $N \subset \mathbb{R}$ ist Nullmenge für μ genau dann, wenn N Nullmenge für λ ist.

Aufgabe 3. In der Analysis I hatten wir die Γ-Funktion $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kennengelernt, die die Integraldarstellung

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$$

besitzt. Wir wollen für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ zeigen, daß Γ im Intervall $(0, 2a)$, d.h. für $|h| < a$, die Potenzreihenentwicklung

$$\Gamma(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{k!}\int_0^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}(\log t)^k\, dt$$

besitzt.

(a) Zeigen Sie, daß für $h \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt:

$$t^{a+h-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\log t)^k}{k!}h^k.$$

(b) Setze

$$f_n(t) := t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\log t)^k}{k!}h^k.$$

b.w.

Zeigen Sie, daß für jedes $\delta > 0$ und $|h| \leq \delta$ jede Funktion f_n majorisiert wird durch die Funktion F, gegeben durch

$$F(t) := \begin{cases} t^{a+\delta-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \geq 1, \\ t^{a-\delta-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \in (0,1). \end{cases}$$

(c) Verifizieren Sie, daß die Majorante F für $0 < \delta < a$ über $\mathbb{R}^+$ integrabel ist.

(d) Folgern Sie mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue die angegebene Reihenentwicklung für $\Gamma(a+h)$.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll mittels des Cavalierischen Prinzips das Volumen β_n des n-dimensionalen Balles $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon\ |\mathbf{x}| \leq 1\}$ berechnet werden. Für einen alternativen Zugang siehe Abschnitt 7.8 meiner Vorlesung Analysis I (abgeheftet in der Bibliothek unter 'Mathematik I').

(a) Folgern Sie aus dem Cavalierischen Prinzip die rekursive Formel $\beta_n = \beta_{n-1} \cdot \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$.

(b) Zeigen Sie durch Substitution, daß sich dies auch schreiben läßt als $\beta_n = \beta_{n-1} \cdot \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

(c) Zeigen Sie mittels partieller Integration, daß $\beta_{2m} = \dfrac{\pi}{m} \cdot \beta_{2m-2}$ bzw. $\beta_{2m+1} = \dfrac{2\pi}{2m+1} \cdot \beta_{2m-1}$.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung der elementargeometrischen Werte von β_1 und β_2, daß

$$\beta_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \quad \text{bzw.} \quad \beta_{2m+1} = \frac{2^{m+1} \cdot \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}.$$

(e) Benutzen Sie die Eigenschaften der Γ-Funktion (siehe z. B. Seiten 131–132 und Abschnitt 7.8 meiner Analysis I), um diese Formeln einheitlich als $\beta_n = \pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ zu schreiben.

Bonusaufgabe. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß das in der Vorlesung konstruierte Produktmaß $\mu \otimes \nu = \eta|_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ tatsächlich die Produktformel $(\mu\otimes\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$ erfüllt. Hier war das äußere Maß $\eta\colon\ \mathcal{P}(X\times Y) \to [0,\infty]$ durch

$$\eta(M) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \cdot \nu(B_j)$$

definiert, wobei das Infimum über Überdeckungen

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \tag{$*$}$$

von M mit abzählbar vielen Rechtecken genommen wird.

(a) Zeigen Sie direkt aus der Definition von η, daß $\eta(A\times B) \leq \mu(A)\cdot\nu(B)$.

(b) Es sei $A_k \times B_k$, $k \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Familie von *disjunkten* Rechtecken, deren Vereinigung das Rechteck $A \times B$ ist: $A = \sqcup_k A_k \times B_k$.

  (i) Zeigen Sie, daß für jedes $x \in X$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)\chi_{A_k}(x) = \nu(B)\cdot\chi_A(x)$.

  (ii) Folgern Sie mittels des Satzes über monotone Konvergenz, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu(B_k)\cdot\chi_{A_k}\, d\mu = \int_X \nu(B)\cdot\chi_A\, d\mu$$

  gilt, also $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)\cdot\mu(A_k) = \nu(B)\cdot\mu(A)$.

(c) Wir betrachten jetzt eine Überdeckung von $M = A\times B$ der Form $(*)$. Konstruieren Sie induktiv eine disjunkte Überdeckung mit Rechtecken $A'_k \times B'_k$ wie in (b) mit $\sum_k \mu(A'_k)\cdot\nu(B'_k) \leq \sum_j \mu(A_j)\cdot\nu(B_j)$. Folgern Sie dann mit (b), daß $\eta(A\times B) \geq \mu(A)\cdot\nu(B)$.

Abgabe: Mittwoch, 13.11.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).