WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Auf $\mathbb{R}^3$ seien die 1-Formen

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz \\ \omega_2 &= \omega_1 + 2xy\,dz\end{aligned}$$

gegeben. Welche der Formen ist geschlossen? Welche der Formen ist exakt? Berechnen Sie die Integrale von ω_1 bzw. ω_2 entlang der Kurve

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{v}$ ein konservatives Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe eine Funktion $\Phi \in C^1(U)$, so daß $\mathbf{v}(p) = -\operatorname{grad} \Phi(p) \in T_pU$ für jedes $p \in U$.

Weiter sei $\gamma \in C^2([a,b], U)$ eine Kurve in U, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

genügt. Man beweise den Energiesatz

$$\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \Phi((\gamma(t)) \equiv \text{konst.}$$

Aufgabe 3. Sei $\omega = f(x)\,dx$ eine C^∞ 1-Form auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß es eine reelle Zahl p und eine C^∞-Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß sich ω schreiben lässt als

$$\omega = p\,dx + dg.$$

Wie wir später diskutieren werden, zeigt dies, daß die erste de Rham-Kohomologiegruppe $H^1(S^1)$ der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^1 (d.h. des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) isomorph zu $\mathbb{R}$ ist, da man $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (oder $[0,1]/0 \sim 1$) mit S^1 identifizieren kann vermöge der wohldefinierten Abbildung $[x] \mapsto \exp(2\pi i x)$, wobei $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die durch $x \in \mathbb{R}$ repräsentierte Äquivalenzklasse bezeichnet. Hier ist H^1 die Gruppe $\{\text{geschlossene 1-Formen}\}/\{\text{exakte 1-Formen}\}$.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine stetige differenzierbare geschlossene 1-Form auf einem offenen Rechteck $U \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gelte $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß ω exakt ist, indem Sie nachweisen, daß für jeden beliebigen Punkt $(a,b) \in U$ die Funktion

$$f(x,y) := \int_a^x p(t,b)\,dt + \int_b^y q(x,t)\,dt$$

eine Stammfunktion von ω ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß das k-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_k(v_1, \ldots, v_k)$ des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, aufgespannten Parallelepipeds im $\mathbb{R}^n$ gegeben ist durch die Wurzel aus der Gramschen Determinante $\det\big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,k}$.
Hinweis: Wir setzen aus der Linearen Algebra als bekannt voraus, daß für $k = n$ gilt:

$$\mathrm{Vol}_n^{or}(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n),$$

wobei in dieser Gleichung links das orientierte Volumen gemeint ist, und rechts die Determinante der $(n \times n)$-Matrix mit den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. (Der Grund hierfür ist, daß sowohl Vol_n^{or} als auch die Determinante multilinear und alternierend sind, und auf der Standardbasis den Wert 1 liefern.) Für $k < n$ können wir zu den gegebenen Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ weitere Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ so wählen, daß $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $j = k+1, \ldots, n$, sowie $\langle v_j, v_j\rangle = 1$ für $j = k+1, \ldots, n$. Es ist dann geometrisch plausibel (und darf im Beweis verwendet werden), daß $\mathrm{Vol}_k(v_1, \ldots, v_k) = |\,\mathrm{Vol}_n^{or}(v_1, \ldots, v_n)|$.

Abgabe: Mittwoch, 4.12.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).