Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon\ x \leq 0\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon\ x \geq 0\}$ sternförmige Gebiete sind, jeweils bezüglich eines geeigneten Referenzpunktes.

(b) Sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form. Es gebe einen Kreis um den Nullpunkt, so daß das Integral von ω längs dieses Kreises gleich 0 ist. Zeigen Sie, daß ω exakt ist.

(c) Es sei (u,v) ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d.h.

$$p \longmapsto (u(p), v(p)) \in \mathbb{R}^2 = T_pU$$

ist eine C^1-Abbildung. Es gelte $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß es dann eine reelle Zahl c gibt, so daß das Vektorfeld

$$\Big(u(x,y) - c\frac{y}{x^2+y^2}, v(x,y) + c\frac{x}{x^2+y^2}\Big)$$

konservativ ist.

Aufgabe 2. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz\,dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 3. (a) Sei ω eine 2-Form auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V. Zeigen Sie, daß es eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von V^* und eine natürliche Zahl k mit $2k \leq n$ gibt, so daß

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2k-1} \wedge \alpha_{2k}.$$

(b) Zeigen Sie, daß k eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft

$$\omega^k \neq 0, \quad \omega^{k+1} = 0.$$

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Die 1-Formen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \neq 0$.

(b) Eine k-Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ heißt **zerlegbar**, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$.

(i) Für $\dim V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.

(ii) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

b.w.

Bonusaufgabe. In dieser Aufgabe sollen einige Formeln der dreidimensionalen Vektoranalysis (vergl. Analysis II, Übungsblatt 5) mit Hilfe des Differentialformenkalküls hergeleitet werden.

Wir schreiben formal

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &:= (dx_1, dx_2, dx_3), \\ d\mathbf{F} &:= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2), \\ dV &:= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ setzen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\, d\mathbf{s} &:= v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2 + v_3\, dx_3, \\ \mathbf{v}\, d\mathbf{F} &:= v_1\, dx_2 \wedge dx_3 + v_2\, dx_3 \wedge dx_1 + v_3\, dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{v}$ ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} df &= \operatorname{grad} f\, d\mathbf{s}, \\ d(\mathbf{v}\, d\mathbf{s}) &= \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\mathbf{F}, \\ d(\mathbf{v}\, d\mathbf{F}) &= \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV. \end{aligned}$$

(b) Folgern Sie aus $d(d\omega) = 0$ für jede C^2 k-Form ω, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0, \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

für $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{v}$ ein C^2-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$.

Bonusaufgabe. Beweisen Sie die folgenden Produktregeln für differenzierbare Funktionen f und differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ auf dem $\mathbb{R}^3$, indem Sie die entsprechenden Formeln für Differentialformen herleiten.

(i) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{v} \rangle$,

(ii) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{v}$,

(iii) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$.

Abgabe: Mittwoch, 11.12.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).