WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^3$, dessen Divergenz verschwindet. Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, 3-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit.

(a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \mathbf{v}(x)$.

(b) Es gelte $\mathbf{v} = 0$ längs ∂M. Zeigen Sie, daß $\displaystyle\int_M \mathbf{v}\, dx = 0$.

Aufgabe 2. Das Vektorfeld $\mathbf{v}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei definiert durch $\mathbf{v}(x) = \dfrac{x}{|x|^n}$. Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, n-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit, die den Ursprung des $\mathbb{R}^n$ im Inneren enthält. Mit $\alpha(x)$, $x \in \partial M$, bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Vektor x und dem äußeren Normalenvektor $\mathbf{n}(x)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\int_{\partial M} \frac{\cos \alpha(x)}{|x|^{n-1}}\, dS(x) = \omega_{n-1},$$

wobei ω_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Volumen der $(n-1)$-Sphäre $S^{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\big\}$ bezeichnet.

Hinweis: Betrachten Sie die Untermannigfaltigkeit $M_\varepsilon = \big\{x \in M \colon |x| \geq \varepsilon\big\}$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Aufgabe 3. Es sei $H \subset \mathbb{R}^3$ das hyperbolische Paraboloid $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 - y^2\big\}$ und $M \subset H$ die Teilmenge $\big\{(x,y,z) \in H \colon x^2 + y^2 \leq 1\big\}$. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x,y,z) = (z,x,y)$.

Aufgabe 4. Es sei $\mathbf{v}$ ein C^2-Vektorfeld auf dem Einheitsball $D^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leq 1\big\}$, das auf dem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$ nullstellenfrei ist und dort der Bedingung

$$\frac{\mathbf{v}(x)}{|\mathbf{v}(x)|} = x, \quad x \in S^{n-1}$$

genügt. Zeigen Sie, daß $\mathbf{v}$ in D^n eine Nullstelle hat.

b.w.

Bonusaufgabe. Es sei $\mathbf{v}$ wie in Aufgabe 4, aber in den Randpunkten gelte jetzt nur die schwächere Bedingung $\langle x, \mathbf{v}(x) \rangle > 0$. Zeigen Sie, daß auch ein solches $\mathbf{v}$ eine Nullstelle in D^n haben muß.

Abgabe: Mittwoch, 15.1.20
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).