WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 13
(Bonusblatt)

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Eigenschaft "C^k-homotop" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^k-Abbildungen $M \to N$ (mit M, N Untermannigfaltigkeiten) definiert.

Aufgabe 2. Man sagt, ein topologischer Raum X hat die Fixpunkteigenschaft, falls jede stetige Abbildung $X \to X$ einen Fixpunkt hat.

(a) Sie $A \subset X$ ein Retrakt von X, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$. Der Raum X habe die Fixpunkteigenschaft. Zeigen Sie, daß dann auch A die Fixpunkteigenschaft hat.

(b) Welcher der folgenden Räume hat die Fixpunkteigenschaft?

 (i) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ xy = 0,\ |x|, |y| \leq 1\big\}$.

 (ii) Das 'Haus vom Nikolaus'.

 (iii) Die orientierbare Fläche vom Geschlecht 3.

 (iv) Eine Kugel mit drei 'Haaren'.

Aufgabe 3. (a) Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-Kurve und ω eine stetige 1-Form auf dem $\mathbb{R}^2$. Weiter sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-Abbildung. Zeigen Sie, daß

$$\int_\gamma \Phi^*\omega = \int_{\Phi\circ\gamma} \omega.$$

(b) Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine glatt berandete 2-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit und $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Diffeomorphismus auf das Bild $\Phi(G)$. Zeigen Sie die Maßtransformationsformel

$$\mathrm{Vol}_2(\Phi(G)) = \int_G \det J_\Phi \, dx \wedge dy$$

mittels (a) und der Leibnizschen Sektorformel.

(c) Überlegen Sie sich, wie man so iterativ einen neuen Beweis der Transformationsformel in beliebiger Dimension erhalten kann (unter der stärkeren Voraussetzung der C^2-Differenzierbarkeit).

Aufgabe 4. Geben Sie eine stetige Abbildung der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| < 1\}$ in sich selbst an, die keinen Fixpunkt besitzt.

Abgabe: Mittwoch, 22.1.20
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).